

para los transportes al caso de una sola obra con varias canteras, pues, con efecto, lo mismo costaría llevar los materiales de las canteras á la obra, que lo que costaría, ya ésta desmontada, transportar sus materiales á los respectivos puntos de procedencia en las mismas proporciones en que de ellos se habían tomado, caso completamente idéntico al que examinamos. Las proposiciones demostradas en el (cap. II) son tambien ciertas en el caso presente, así como el teorema principal (teorema 16), sin más que modificar su enunciado con arreglo á los términos del problema, en esta forma.

TEOREMA 18.—*Cuando una sola cantera haya de proveer á varias obras, las distancias medias de transporte de la sillería y mampostería guardarán entre sí la misma relacion de magnitud que la que existe entre las razones de los volúmenes de ambos materiales procedentes de la cantera, con los correspondientes á la obra más próxima.*

35. SEGUNDO CASO.—*VARIAS OBRAS Y DOS CANTERAS.*—Para el cálculo de distancias medias de transporte, evidentemente, el sistema de n obras y dos canteras es equivalente al sistema de dos canteras con n obras, pues no habría más que repetir el razonamiento del número anterior para demostrarlo, y éste, á su vez, hemos visto (33) que es equivalente al de una sola obra y $2n$ canteras, que también se sustituye por otro de $2n$ obras y una cantera, para el que se han demostrado todas las proposiciones del (cap. II). Resulta, por lo tanto, cierto también en el caso presente el teorema principal (teorema 17).

36. TERCERO.—*CASO GENERAL.—VARIAS OBRAS Y VARIAS CANTERAS.*—Sea, finalmente, n el número de obras y p el de canteras. Haciendo construcciones análogas á las del número (32), esto es, trasladando cada uno de los sistemas formados por cada obra y las líneas que miden las distancias de ésta á las diferentes canteras, paralelamente á sí mismo, hasta llevar todas las obras á un centro común, en éste se pueden suponer encontrados todos los trabajos, y por lo tanto, para el cálculo de distancias el sistema primitivo será equivalente al así nuevamente formado y que le constituirá una sola obra con p canteras por cada sistema transportado ó np canteras su total, volviendo entonces á las condiciones del (cap. II), tantas veces citado. Las proposiciones allí demostradas son, por lo tanto, completamente generales. De donde resultan, para el cálculo de comparación de distancias medias, los teoremas fundamentales siguientes:

37. TEOREMA 19.—*Si al dividir los volúmenes totales de dos materiales diferentes que llamaremos sillería y mampostería, así como los de los mismos materiales, pero correspondientes á los puntos de menor recorrido, ó mínima distancia, transportados de la misma cantera á la misma*

obra, resultan iguales estos cocientes, las distancias medias de transporte de ambos materiales serán iguales; si el primer cociente es mayor que el segundo, también será mayor la distancia media correspondiente al primer material, esto es, al que figura como numerador, y VICEVERSA si el primer cociente es menor que el segundo.

38. Recíprocamente.—TEOREMA 20.—Cuando las distancias medias de transporte de dos materiales procedentes de los mismos puntos y para las mismas obras sean iguales, también lo serán los cocientes resultantes de dividir los volúmenes totales de cada material y los parciales de menor recorrido, y si es mayor la del material que figura en el numerador, también será mayor el primer cociente que el segundo, y menor en el caso contrario.

La demostración de este recíproco, apoyándose en el teorema directo, es tan sencilla, que no creemos deber insistir en ella.

39. Veamos ahora cuál es el límite superior del número de distancias parciales ó efectivas, comprendidas entre obras y canteras.

Si son n las obras, cada una puede considerarse, que á lo más lleva materiales de cada una de las p canteras, y por lo tanto, tiene á lo sumo p distancias diferentes, siendo np el número máximo de distancias diferentes, y como cada distancia lleva una razón, también np será el número de razones parciales diferentes. A cada obra corresponde asimismo una razón entre los volúmenes totales de cada material en ella empleado, y por lo tanto, había n razones múltiples de esta especie, y á su vez, á cada cantera corresponderá otra razón múltiple entre los volúmenes totales de ella extraídos, y teniendo además en cuenta la razón de volúmenes totales, el número máximo R de razones será:

$$R = np + n + p + 1 = n(p + 1) + (p + 1) = (n + 1)(p + 1)$$

y á cada razón, correspondiendo una distancia, ya sea media, ya efectiva, el número D de éstas, será también

$$D = (n + 1)(p + 1)$$

Claro es que estos números R y D pueden reducirse cuando haya un cierto número de distancias iguales, y entonces las razones sencillas á ellas correspondientes podrán sustituirse por una de ellas, ó bien disminuirá este número, que es lo general, si no da cada cantera de los dos materiales para cada una de las obras.

No debe olvidarse tampoco que la razón de volúmenes totales está comprendida en valor absoluto entre la mayor y menor de las relaciones sencillas parciales.

10. *Relaciones entre s y m.*—Pasemos ahora á estudiar las relaciones que puedan existir entre los volúmenes de cada uno de dichos materiales.

PRIMER CASO.—IGUALDAD DE DISTANCIAS MEDIAS.—Si

$$\Delta_s = \Delta_m \quad \frac{s}{m} = \frac{s_n}{m_n}$$

y para que se verifique esta última ecuación, será preciso que en los dos términos de una de estas razones haya un factor común, entero ó fraccionario r , es decir, que

$$s = rs_n \quad m = rm_n$$

y como según hemos demostrado en el (cap. II), la igualdad entre las distancias medias lleva á esta progresión

$$\frac{s_1}{m_1} = \frac{s_2}{m_2} = \frac{s_3}{m_3} = \dots = \frac{s_n}{m_n} = \frac{s}{m}$$

y como consecuencia á esta proporción

$$\frac{s_p + s_q + \dots}{m_p + m_q + \dots} = \frac{s}{m}$$

y de todas se puede decir lo mismo; resulta que

TEOREMA 21.—*Siempre que las distancias medias de transporte de dos materiales que proceden de los mismos puntos sean iguales, las razones de las sumas de un cierto número de volúmenes correspondientes al mismo número de obras y canteras, serán equimúltiplos de los volúmenes de cada uno de dichos materiales extraídos de cada cantera para cada obra, así como de los volúmenes totales.*

Si $s = s_n$ será $r = s$ $m = m_n$

y, por tanto,

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s_p = \dots = s_{n-1} = 0 \quad s = s_n$$

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{p-1} = m_p = \dots = m_{n-1} = 0 \quad m = m_n$$

es decir, que se habrán tomado todos los materiales de una sola cantera y no habrá, tampoco, más que una obra.

Si $s = m$ será $\frac{s}{m} = 1 = \frac{s_n}{m_n}$

y $s_1 = m_1 \quad s_2 = m_2 \quad \dots \quad s_n = m_n$

lo que equivaldrá á decir, que de cada cantera se habrá tomado la misma cantidad de cada material para la obra correspondiente.

SEGUNDO CASO.—LAS DISTANCIAS SON DESIGUALES.—Sea

$$\Delta_s > \Delta_m \quad \text{ó} \quad \frac{s}{m} > \frac{s_n}{m_n}$$

y si $\underline{p}$ y $\underline{q}$ son dos números tales, que

$$p > 1 \quad q > 1$$

se podrá escribir

$$s = ps_n \quad m = qm_n$$

y sustituyendo en la primera expresión y multiplicando los resultados por $\frac{m_n}{s_n}$ quedará

$$p > q$$

es decir, que á partir de $\frac{s_n}{m_n}$ crece en la suma más rápidamente el volumen de sillería que el de mampostería, sucediendo la inversa, como es fácil ver si $\Delta_s < \Delta_m$. Pero si en el primer caso suponemos $\underline{s}$ y $\underline{m}$ constantes, la primera relación será tanto mayor que la segunda cuanto más disminuya $\underline{s_n}$ ó crezca $\underline{m_n}$; mas aun cuando, que es lo general, $\frac{s}{m}$ varie

con los términos de $\frac{s_n}{m_n}$, y $\underline{s_n}$ disminuya en una cantidad $\underline{p}$, como también $\underline{s}$ decrecerá en la misma cantidad, las dos fracciones se habrán convertido en estas otras:

$$\frac{s - p}{m} \quad \frac{s_n - p}{m_n}$$

que reducidas á un común denominador, resultan sus numeradores

$$sm_n - pm_n \quad s_n m - pm;$$

pero por hipótesis

$$sm_n > s_n m \quad m_n < m,$$

luego por estas dos razones

$$sm_n - pm_n > s_n m - pm \quad \text{ó} \quad \frac{s - p}{m} > \frac{s_n - p}{m_n},$$

creciendo tanto más la primera, al propio tiempo que disminuye la segunda fracción, cuanto más aumente $\underline{p}$ ó cuanta menos sillería se tome de la cantera más próxima sin modificar el volumen de la mampostería. El límite superior de $\underline{p}$ es

$$p = s_n,$$

y entonces

$$\frac{s}{m} > 0.$$

Si, por el contrario, crece m_n , las dos relaciones serán

$$\frac{s}{m + q} \quad \frac{s_n}{m_n + q}$$

que reducidas á un común denominador y comparando los numeradores

$$sm_n + sq \quad s_n m + s_n q$$

resultará tanto mayor la primera que la segunda, cuanto mayor sea q . Inversos resultados se obtendrían si $\Delta_s < \Delta_m$. Queda así demostrada la siguiente proposición.

TEOREMA 22.—*Cuando las distancias medias de transporte no sean iguales, la distancia media que sea mayor crece tanto más, cuanto menos material se tome del que resulta más distante de la cantera más próxima y más de aquél cuya distancia media es menor. De donde se deduce que de las canteras más próximas convendrá tomar siempre la mayor cantidad posible del material de transporte más caro, resultado evidente por otra parte.*

CAPÍTULO V.

APLICACIÓN DE LA TEORÍA Á LAS OBRAS DE LOS MODELOS DE LA COLECCIÓN OFICIAL DE TARJEAS, ALCANTARILLAS Y PONTONES PARA CARRETERAS.

41. Como aplicación de la teoría expuesta, procedamos ahora á estudiar cuál es la relación $\frac{s}{m}$ de los volúmenes de sillería y mampostería que entran en cada una de las obras de fábrica de la colección oficial aprobada en 30 de Agosto de 1858, suponiendo que ninguna de ellas tiene cañón prolongado, y haciendo el estudio para carreteras de primero, segundo y tercer orden, con el fin de ver si es posible señalar alguna ley que haga conocer la conveniencia del empleo de tal ó cual clase de obras con preferencia á otras, atendiendo únicamente á la distancia de transporte.

Al efecto hemos empezado por hallar, para cada obra de la colección oficial, los volúmenes totales de las diferentes clases de fábrica en los tres órdenes de carreteras, partiendo de las cubicaciones que figuran en los modelos para los frentes y para el metro lineal de cañón. Así, al adoptar estas cifras hemos cumplido también nuestro objeto de que el estudio que

nos ocupa sea útil para la redacción de proyectos, ajustándole á los modelos oficiales.

De las cubicaciones expresadas hemos deducido luego, para cada obra y para carreteras de los tres órdenes, los valores de la relación $\frac{s}{m}$ de los volúmenes de sillería y mampostería. Por la imposibilidad que ocasiona la falta de espacio en estas columnas, para reproducir íntegros los estados que contienen las cifras exactas á que los cálculos nos han conducido, resumimos gráficamente en la lámina 76 los resultados obtenidos. En la horizontal inferior de este cuadro gráfico aparecen los números con que en la colección oficial se designan los diferentes modelos, cuyas luces están representadas por las ordenadas (contadas por debajo del eje XX_1) de la línea poligonal de trazos. Las alturas correspondientes de los mismos modelos están dadas por la línea de trazo y punto, midiendo de igual modo sus ordenadas; y las de la línea continua representan el valor de la relación $\frac{f}{l}$ en cada obra.

En la parte baja del cuadro representamos los valores de la relación $\frac{s}{m}$ en las diversas obras, adoptando tres ejes horizontales diferentes, uno para cada uno de los órdenes de carreteras, con objeto de evitar la confusión que resultaría de conservar un mismo eje para todos ellos. La línea continua es la relativa á las carreteras de primer orden, hallándose referida al eje horizontal $X'X_1'$; las ordenadas de la línea de trazo interrumpido dan para las carreteras de segundo orden los valores de $\frac{s}{m}$, medidos sobre el eje $X''X_1''$; y por último, la variación de esta relación en las carreteras de tercer orden queda definida por la línea de trazo y punto, á la cual corresponde el eje $X'''X_1'''$.

Analizando ahora el cuadro, se observa:

1.º Que los máximos de $\frac{s}{m}$ corresponden á los mínimos de las alturas h , y dentro de éstas, *por regla general*, á los que corresponden á luces máximas, siendo el mayor valor de $\frac{s}{m}$ el de la obra menor, tajea modelo número 1.

2.º Que, por el contrario, los mínimos de $\frac{s}{m}$ corresponden á los máximos de las alturas h , y dentro de éstas, *por regla general*, á los máximos de las luces, observándose, sin embargo, que los menores mínimos van disminuyendo desde la tajea 1 hasta la alcantarilla 62, que es la que co-

responde al *minimum minimorum*, y de éste vuelven á crecer algo, aunque nunca llegan á los valores máximos de dichos mínimos en obras de menor modelo.

Estas dos observaciones, la de que, generalmente es más caro el transporte de la sillería que el de la mampostería, y la de que en rigor, lo que hemos llamado s y m son s_p y m_p , y bajo la hipótesis que los volúmenes totales no varíen, nos conducen á establecer que, á ser posible, las obras pequeñas deben reunirse acercándolas á las canteras más próximas; que para un desagüe determinado convendrá disminuir la altura de la obra todo lo posible; que para determinada cota será conveniente la obra de menor luz, y para determinada luz la de menor altura en tajeas y alcantarillas, sucediendo lo inverso en los pontones, pero todo esto dentro de los límites que marca el cuadro; claro es que fuera de dichas condiciones, algunas de estas conclusiones se modifican.

Por otra parte, el examen del estado núm. 4 demuestra que dentro de un mismo modelo, el valor de $\frac{s}{m}$ ó mejor $\frac{s_p}{m_p}$ es menor para las carreteras de primer orden que para las de segundo, y en éstas menor que en las de tercero, salvo la pequeña excepción que se observa en las tajeas de los primeros modelos; esto es, que cuanto mayor es el cañón de la obra mayor es también el valor de $\frac{s_p}{m_p}$.

Finalmente, de estas dos observaciones reunidas, se deduce esta otra: que el valor de $\frac{s_p}{m_p}$ será mayor, y por tanto, Δ_s menor, si en lugar de una obra mayor se puede colocar otra de menor modelo, prolongando el cañón: esto también dentro de límites, que en cada caso convendrá estudiar.

CAPÍTULO VI.

LOS MATERIALES QUE SE TOMAN DE LOS MISMOS PUNTOS DE PROCEDENCIA SON MÁS DE DOS.

42. Si en lugar de dos materiales fuesen tres ó más, como sillería, mampostería, afirmado y hormigón, ó ladrillo, teja y baldosa, la comparación de distancias sería muy sencilla. Supongamos este último caso: hay que llevar para uno ó varios edificios, y de los mismos tejares, volúmenes l de ladrillo, t de teja y b de baldosa; para saber la relación de las distancias de transporte se buscarán las relaciones

$$\frac{l}{t} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{l_n}{t_n} \quad \text{y entonces} \quad \Delta_1 \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \Delta_t$$

después

$$\frac{l}{b} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{l_n}{b_n} \quad \text{y será} \quad \Delta_1 \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \Delta_b.$$

Si ahora ocurre

$$\Delta_1 = \Delta_t = \Delta_b$$

el problema está resuelto, así como también si los signos se corresponden; esto es, si

$$\Delta_1 > \Delta_t \quad \text{y} \quad \Delta_b > \Delta_1, \quad \text{pues resulta} \quad \Delta_b > \Delta_1 > \Delta_t,$$

ó bien

$$\Delta_1 < \Delta_t \quad \text{y} \quad \Delta_b < \Delta_1, \quad \text{que da} \quad \Delta_b < \Delta_1 < \Delta_t.$$

Si, por el contrario,

$$\Delta_1 > \Delta_t \quad \Delta_1 > \Delta_b,$$

ó bien

$$\Delta_1 < \Delta_t \quad \Delta_1 < \Delta_b,$$

no habrá más que hallar la relación

$$\frac{t}{b} \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{t_n}{b_n} \quad \text{que dará} \quad \Delta_t \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \Delta_b,$$

que resuelve también el problema: t , resultando para cada caso:

- 1.° $\Delta_1 > \Delta_t > \Delta_b.$
- 2.° $\Delta_1 > \Delta_b > \Delta_t.$
- 3.° $\Delta_t > \Delta_b > \Delta_1.$
- 4.° $\Delta_b > \Delta_t > \Delta_1.$

Teniendo presentes estos resultados y los costes por unidad y kilómetro de cada clase de transporte, será fácil deducir *á priori* qué transporte resultará en absoluto más económico.

Salamanca 25 de Abril de 1888.

MANUEL GONZÁLEZ MARTÍ.