

factores monomios; luego, en resumen, el signo de $\Delta_s - \Delta_m$ depende del de los factores binomios de la forma

$$\frac{s_p}{m_p} - \frac{s_q}{m_q}$$

Si las razones de volúmenes $\frac{s_p}{m_p}$ van decreciendo todas ó aumentando todas, según el orden de subíndices, esto es, así:

$$\frac{s_1}{m_1} > \frac{s_2}{m_2} > \frac{s_3}{m_3} > \dots > \frac{s_n}{m_n}$$

ó bien

$$\frac{s_1}{m_1} < \frac{s_2}{m_2} < \frac{s_3}{m_3} < \dots < \frac{s_n}{m_n}$$

la expresión (7) será positiva en el primer caso y negativa en el segundo, y por tanto,

$$\begin{array}{ll} 1.^{\text{er}} \text{ caso} & \Delta_s > \Delta_m \\ 2.^{\text{o}} \text{ »} & \Delta_s < \Delta_m \end{array}$$

así como si son todas iguales, esto es:

$$\frac{s_1}{m_1} = \frac{s_2}{m_2} = \frac{s_3}{m_3} = \dots = \frac{s_n}{m_n}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{m_1} &= \frac{s_1 + s_2}{m_1 + m_2} = \frac{s_p + s_q}{m_p + m_q} = \dots = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \dots \\ &= \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{s}{m} \end{aligned}$$

resultará

$$3.^{\text{er}} \text{ caso} \quad \Delta_s = \Delta_m$$

Del razonamiento anterior, se deducen los siguientes principios:

TEOREMA 10.—Que existiendo proporcionalidad entre las cantidades de sillería y mampostería de la obra, con las que de los mismos materiales se extraigan de cada cantera, las distancias medias de transporte de ambos materiales serán iguales.

TEOREMA 11.—Si no existe proporcionalidad entre los volúmenes de sillería y mampostería, y la magnitud de las razones de ambos materiales correspondientes á cada cantera sigue la misma ley ó se corresponden con las distancias de las canteras á la obras, esto es, que á la cantera más distante corresponde la mayor razón, etc., la distancia media de transporte de la sillería será mayor que la de la mampostería.

TEOREMA 12.—Si no habiendo proporcionalidad de volúmenes, las razones de los materiales procedentes de cada cantera siguen inversa ley que las distancias de las canteras á las obras, esto es, que á mayor razón corresponda menor distancia, la media de transporte de la sillería será menor que la de la mampostería.

Pero cuando las relaciones $\frac{s_p}{m_p}$ no van creciendo ó decreciendo por el orden de los subíndices, entonces en la fórmula (7) habrá términos de diferente signo, y no puede directamente decirse cuál será el de dicha expresión, ni, por tanto, el de $\Delta_s - \Delta_m$, y es preciso proceder de un modo diferente para averiguarlo; pero antes vamos á demostrar el siguiente:

20. TEOREMA 13.—La razón $\frac{s}{m}$ de los volúmenes totales está comprendida SIEMPRE entre la mayor y la menor en valor absoluto de las que representan los volúmenes tomados de cada cantera.

Con efecto, supongamos que

$$\frac{s}{m} > \frac{s_p}{m_p}$$

en que s_p y m_p son los volúmenes tomados de la cantera de orden p : se deduce inmediatamente

$$\frac{s}{m} - \frac{s_p}{m_p} > 0;$$

pero s_p y m_p deducidos de las ecuaciones (5_s) y (5_m) son

$$s_p = s - s_1 - s_2 - s_3 - \dots - s_{p-1} - s_{p+1} - \dots - s_n$$

$$m_p = m - m_1 - m_2 - m_3 - \dots - m_{p-1} - m_{p+1} - \dots - m_n$$

que substituídos en la supresión anterior la reducen á esta otra:

$$\frac{s}{m} - \frac{s - s_1 - s_2 - s_3 - \dots - s_n}{m - m_1 - m_2 - m_3 - \dots - m_n} > 0$$

que simplificada, y después de dividir por la cantidad positiva m , puede ponerse bajo la forma

$$\begin{aligned} m_1 \left(\frac{s_1}{m_1} - \frac{s}{m} \right) + m_2 \left(\frac{s_2}{m_2} - \frac{s}{m} \right) + m_3 \left(\frac{s_3}{m_3} - \frac{s}{m} \right) + \dots \\ + m_{p-1} \left(\frac{s_{p-1}}{m_{p-1}} - \frac{s}{m} \right) + m_{p+1} \left(\frac{s_{p+1}}{m_{p+1}} - \frac{s}{m} \right) + \dots \\ + m_n \left(\frac{s_n}{m_n} - \frac{s}{m} \right) > 0; \end{aligned}$$

pero para que esta expresión sea positiva (primer signo de la primera condición), es preciso que por lo menos alguno de los binomios que la forman lo sea, así como que haya alguno negativo si ha de serlo la expresión misma (segundo signo de la primera condición); luego, por ejemplo:

$$\frac{s_q}{m_q} - \frac{s}{m} > 0$$

de donde

$$\frac{s}{m} < \frac{s_q}{m_q}$$

y por tanto (primer signo), si $\frac{s_p}{m_p}$ es la razón menor y $\frac{s_q}{m_q}$ la mayor, el teorema está demostrado; en caso contrario, habrá dos razones:

$$\frac{s_z}{m_z} < \frac{s_p}{m_p} \quad \frac{s_c}{m_c} > \frac{s_q}{m_q}$$

y por lo tanto, sustituyendo en la primera y última condición, resultará

$$\frac{s_c}{m_c} > \frac{s}{m} > \frac{s_z}{m_z}$$

que demuestra la proposición para el primer signo y para el segundo si $\frac{s_p}{m_p}$ es la razón mayor, y $\frac{s_q}{m_q}$ la menor, queda la proposición demostrada, y cuando esto no suceda, habrá dos razones:

$$\frac{s_z}{m_z} > \frac{s_p}{m_p} \quad \frac{s_c}{m_c} < \frac{s_q}{m_q}$$

que sustituidas en las condiciones darán

$$\frac{s_c}{m_c} < \frac{s}{m} < \frac{s_z}{m_z}$$

con lo que queda completamente demostrado el teorema.

21. Volvamos otra vez á las fórmulas (6₁) y (6_m) del número (19), que deduciremos de nuevo, siguiendo otra marcha, para poder apreciar la relación de magnitud de Δ_s y Δ_m en todos los casos. Al efecto, supondremos, primeramente, que solo existen dos canteras, después tres y así sucesivamente, aumentando en una unidad cada vez el número de canteras, y para simplificar indicaremos con acentos las distancias medias parciales correspondientes á un número de canteras igual al de acentos, así como también acentos en las letras s y m indicarán sumas parciales de volúmenes de las dos, de las tres ó de las n primeras canteras. Según este convenio, si sólo existen las dos primeras canteras, las fórmulas serán (9).

$$\Delta_s'' = \frac{d_1 s_1 + d_2 s_2}{s_1 + s_2 = s''} = d_2 + (d_1 - d_2) \frac{s_1}{s''}$$

$$\Delta_m'' = \frac{d_1 m_1 + d_2 m_2}{m_1 + m_2 = m''} = d_2 + (d_1 - d_2) \frac{m_1}{m''}$$

considerando el conjunto de las dos primeras canteras con un solo punto de procedencia del que se tomasen volúmenes s'' y m'' , siendo las distancias de ésta á la obra diferentes en general para cada clase de fábrica Δ_s'' y Δ_m'' . y si se tiene en cuenta otra cantera, resultarán las fórmulas

$$\Delta_s''' = \frac{\Delta_s'' s'' + d_3 s_3}{s'' + s_3} = \frac{\frac{d_1 s_1 + d_2 s_2}{s''} s'' + d_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3 = s'''} =$$

$$\frac{d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3}{s'''} = d_3 + (\Delta_s'' - d_3) \frac{s''}{s'''}$$

$$\Delta_m''' = \frac{\Delta_m'' m'' + d_3 m_3}{m'' + m_3} = \frac{\frac{d_1 m_1 + d_2 m_2}{m''} m'' + d_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3 = m'''} =$$

$$\frac{d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3}{m'''} = d_3 + (\Delta_m'' - d_3) \frac{m''}{m'''}$$

fórmulas cuyos primeros y penúltimos términos son los que se obtendrían directamente por la aplicación de la expresión (21). Tomando una cantera más, y considerando las tres primeras como una sola y continuando de esta manera, se llegaría á las mismas fórmulas obtenidas en el número (19), bastando para demostrarlo, que si se llega á expresiones de la misma forma que las (8) ó las (4_s) y (4_m) con p canteras, también resultará una expresión equiforme con $p + 1$, pues siendo cierta para tres canteras, lo será para cuatro, para cinco, y en general para n . Pero si es exacta la expresión para p canteras, los valores de Δ_s y Δ_m serán:

$$\Delta_s^{(p)} = \frac{d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3 + \dots + d_p s_p}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_p = s^{(p)}} =$$

$$d_p + (\Delta_s^{(p-1)} - d_p) \frac{s^{(p-1)}}{s^{(p)}}$$

$$\Delta_m^{(p)} = \frac{d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3 + \dots + d_p m_p}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_p = m^{(p)}} =$$

$$d_p + (\Delta_m^{(p-1)} - d_p) \frac{m^{(p-1)}}{m^{(p)}}$$

y si al tomar una cantera más se suponen las p primeras como una sola

que les sea equivalente, en que las distancias serán $\Delta_s^{(p)}$ y $\Delta_m^{(p)}$ y sus volúmenes $s^{(p)}$ y $m^{(p)}$, resultará:

$$\begin{aligned}\Delta_s^{(p+1)} &= \frac{\Delta_s^{(p)} s^{(p)} + d_{(p+1)} s_{(p+1)}}{s^{(p)} + s_{(p+1)}} \\ &= \frac{\frac{d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3 + \dots + d_p s_p}{s^{(p)}} \cdot s^{(p)} + d_{(p+1)} s_{(p+1)}}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{(p)} + s_{(p+1)} = s^{(p+1)}} \\ &= d_{p+1} + (\Delta_s^{(p)} - d_{p+1}) \frac{s^{(p)}}{s^{(p+1)}} \\ &= \frac{d_1 s_1 + d_2 s_2 + d_3 s_3 + \dots + d_p s_p + d_{p+1} s_{p+1}}{s^{(p+1)}}\end{aligned}$$

y de la misma manera,

$$\begin{aligned}\Delta_m^{(p+1)} &= \frac{d_1 m_1 + d_2 m_2 + \dots + d_p m_p + d_{(p+1)} m_{(p+1)}}{m^{(p+1)}} \\ &= d_{(p+1)} + (\Delta_m^{(p)} - d_{(p+1)}) \frac{m^{(p)}}{m^{(p+1)}}\end{aligned}$$

como se quería demostrar, y por tanto, las fórmulas generales (6_s) y (6_m) se pueden escribir también de este modo, cuyo análisis es más sencillo:

$$\begin{aligned}\Delta_s &= \Delta_s^{(n)} = \frac{\Delta_s^{(n-1)} s^{(n-1)} + d_n s_n}{s^{(n-1)} + s_n = s^{(n)} = s} \\ &= d_n + (\Delta_s^{(n-1)} - d_n) \frac{s^{(n-1)}}{s} \quad \dots \quad (9_s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_m &= \Delta_m^{(n)} = \frac{\Delta_m^{(n-1)} m^{(n-1)} + d_n m_n}{m^{(n-1)} + m = m^{(n)} = m} \\ &= d_n + (\Delta_m^{(n-1)} - d_n) \frac{m^{(n-1)}}{m} \quad \dots \quad (9_m)\end{aligned}$$

que se verifican con los valores

$$\begin{aligned}s^{(n-1)} &= s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{n-1} \quad \dots \quad (10) \\ m^{(n-1)} &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} \quad \dots\end{aligned}$$

que son las fórmulas que vamos á discutir.

(Se continuará.)

MANUEL GONZÁLEZ MARTÍ.

