

ciones, normal y paralela al plano horizontal que pasa por el punto en cuestión, la acción de la fuerza tangencial (prescindiendo por ahora de las resistencias debidas al rozamiento y la cohesión), según dicho plano, tenderá, en unión con la componente simétrica de la otra semi-bóveda, á romper el bloque por la sección media de su cuerpo inferior que, como sabemos, forma un solo macizo con las prolongaciones verticales de los estribos. Esta fuerza de tracción debe engendrar, por lo tanto, una resistencia análoga, debida á la cohesión del material, y como esto sucederá en todos los puntos del macizo, la resultante de estas nuevas fuerzas resistentes se encontrará aplicada en su plano horizontal medio, siendo su intensidad igual al producto del área de su sección transversal por el coeficiente de cohesión que, como límite muy inferior, hemos apreciado en 1,12 kilogramos por centímetro cuadrado, ó sea:

$$R_c = 1,12 \times 0,50 \times 2.240 = 5.600 \text{ kilogramos,}$$

cuya magnitud habrá que combinar con la resultante anterior para obtener la final del sistema y su punto de intersección con la base del bloque.

(Se continuará.)

JULIO VALDÉS,
Ingeniero de Caminos.

CONSIDERACIONES

ACERCA DE LA ESTABILIDAD DE LAS BÓVEDAS

DETERMINACIÓN DE LAS PRESIONES POR MEDIO DE FÓRMULAS EMPÍRICAS Y TRAZADOS GRÁFICOS

POR

DON LUIS GAZTELU,

Ingeniero de Caminos.

(Lámina 67.)

I.—GENERALIDADES

En los números correspondientes á los meses de Febrero de 1885 y Junio de 1886 de los *Annales des Ponts et Chaussées*, se publicaron dos interesantes Memorias de los Ingenieros MM. Laterrade y Tourtay, que tienen por objeto establecer fórmulas sencillas y de fácil aplicación para calcular la presión media que sufren las bóvedas en la junta de la clave. El primero dió á conocer las que se refieren á los arcos de medio punto, determinándolas por medio de un procedimiento aproximado, y corrigiendo sus coeficientes por comparación con los resultados de los trazados gráficos usuales consiguió llegar á una fórmula que da la presión media en la clave con gran exactitud. El segundo, demostró que los principios en que se funda la fórmula de Laterrade son igualmente aplicables á los arcos rebajados, y por el mismo procedimiento dedujo las fórmulas correspondientes á este caso.

No puede menos de reconocerse la importancia de estas fórmulas, fundadas en principios racionales, y que con gran rapidez suministran un dato que basta por sí solo en muchos casos para dar una idea exacta de las condiciones de resistencia en que han de hallarse los materiales en la obra, y un criterio seguro para decidir su elección; facilitando, además, el verificar numerosos tanteos, tan convenientes para el acierto en los proyectos. Las fórmulas empíricas, empleadas con frecuencia exclusivamente, nada indican acerca de aquellas condiciones, y los trazados gráficos de las curvas de presiones son demasiado laboriosos si se han de ejecutar con la precisión necesaria para que sus resultados ofrezcan confianza; por otra parte, la necesidad de considerar una sola curva entre las infinitas posibles en la realidad, hace que este minucioso trabajo sólo conduzca á un resultado ilusorio, al que ningún sentido bien definido puede atribuirse, y del que no puede deducirse consecuencia alguna que interese al constructor. Si, como generalmente se hace en la aplicación del método de Méry, se adopta la curva de los tercios de las juntas de clave y de rotura, ó la que pasa por el tercio superior de la primera y el medio de la segunda, se llegará á obtener una cierta presión máxima, correspondiente á la misma curva; pero este resultado nada indica acerca de las presiones reales que la bóveda deberá resistir, puesto que dicha curva es completamente arbitraria, y no hay probabilidad alguna de que se realice con preferencia á otra cualquiera. Los métodos conocidos de Durand-Claye, Peaucellier, Duperuit, Systowski, etc., como es sabido, tienen por objeto eludir esta indeterminación. La teoría más reciente de M. Lavoigne trata la cuestión directamente, teniendo en cuenta la deformación de la bóveda; pero sus fórmulas exigen la realización de ciertas hipótesis, á las que sólo puede acercarse en la práctica mediante precauciones especiales y gran esmero en la construcción, circunstancias que no se pueden obtener en la generalidad de los casos prácticos.

Todo esto explica, á mi modo de ver, por qué en muchos casos se contentan los Ingenieros al proyectar una bóveda con fijar sus proporciones empíricamente haciendo uso exclusivo de las fórmulas conocidas para este objeto; y hace ver además la importancia de las que nos ocupan, puesto que sin ser de más difícil aplicación que aquéllas, dan á conocer un dato de gran interés, y que, como luego veremos, tiene un significado preciso y concreto.

Sin embargo, el conocimiento de la presión media en la clave no es suficiente, por sí solo, para la comprobación de la estabilidad de una bóveda; pues si bien la observación prueba que con ciertos perfiles las presiones medias en las demás juntas difieren muy poco de aquélla, es siempre conveniente determinarlas directamente, según reconocen los autores de las

memorias mencionadas, que considerando sus fórmulas como un medio de facilitar la aplicación del método de Méry, aconsejan que se complete con el trazado de la curva de presiones.

El objeto que me propongo en este modesto trabajo es estudiar medios sencillos, que con la rapidez y exactitud necesarias en la práctica, sirvan para completar la aplicación de las fórmulas de Mr. Laterrade y Tourtay, determinando las presiones medias en cada una de las juntas que ordinariamente se consideran para trazar la curva de presiones, lo cual puede conseguirse: 1.º Por un trazado gráfico que admita á la vez gran número de simplificaciones y de comprobaciones. 2.º Calculando para cada junta fórmulas análogas á los de Laterrade y Tourtay, empleando al efecto sus mismos procedimientos, aunque con algunas modificaciones necesarias en los detalles.

Será, pues, forzoso resumir brevemente los trabajos de dichos Ingenieros, exponiendo los principios en que se fundan y los principales resultados que obtienen.

II.—ELECCIÓN ENTRE LAS DIVERSAS CURVAS DE PRESIONES.

El punto de partida de las investigaciones de M. Laterrade ha sido una observación hecha en gran número de trazados de curvas de presiones, de los que resulta que el espesor en la clave influye muy poco en la presión máxima á que conduce la aplicación del método de Méry, dependiendo casi exclusivamente aquella presión de la luz de la bóveda. Dicho autor prueba que tratándose de una bóveda sin sobrecarga, la presión *crece* cuando aumenta el espesor en la clave, si bien en proporción muy pequeña; llega en el caso de las bóvedas de medio punto á una expresión de la forma $Q = 751 e (L + e)$ para la presión total en la clave.

Pero el punto verdaderamente importante de su método es la elección de la curva de presiones que conviene considerar. Según este Ingeniero, debe recaer la elección en la curva de las mínimas presiones, *porque goza de propiedades geométricas especiales que la hacen apta para servir de comparación entre las condiciones de estabilidad de las bóvedas de diferentes luces y espesores en la clave y diversamente trazadas.*

No pretende, como algunos autores lo han hecho, que esta curva tenga el privilegio de reunir mayores probabilidades de realizarse en la práctica en virtud del *principio de la menor acción*, interpretando erróneamente este resultado analítico de las ecuaciones del movimiento, y atribuyéndole una significación de que carece. La curva de presiones mínimas no tiene mayor probabilidad que otra cualquiera de realizarse en la práctica, ó al menos nadie puede afirmarlo; pero sin embargo, es de gran interés su conocimiento, y su importancia superior al de todas las demás. En

efecto, es evidente que la presión máxima que puede sufrir una bóveda si se consideran las infinitas curvas posibles, no tiene otro límite que el infinito, resultado al que se llega siempre considerando la curva adoptada por Dupuit.

El método de Méry no es, pues, susceptible de fijar un máximo de la presión por centímetro cuadrado. Pero en cambio hay siempre una curva que conduce á una presión máxima menor que cualquiera otra que se considere, puesto que esta presión máxima nunca podrá ser nula ni negativa; y en el mero hecho de existir, esta curva tiene más importancia que otra alguna. Si se considera, por ejemplo, la curva de los tercios de las juntas, resulta de las consideraciones de M Laterrade que no sirve ni aun como término de comparación entre bóvedas de distinto rebajamiento, pues entre el arco de medio punto y la bóveda plana hay un cierto rebajamiento para el cual la curva de los tercios debe ser la de presiones mínimas. Si para ese caso se ajustasen las dimensiones de la bóveda á la presión máxima resultante de dicha curva, es claro que estas dimensiones serían deficientes.

En cambio, la curva de presiones mínimas da á conocer un dato importante, porque conocida la mayor presión media á que da lugar, podrá afirmarse que la bóveda que se estudia tendrá que resistir, *por lo menos*, esa presión.

En mi opinión, la consideración de la curva de las presiones mínimas es de tal importancia, que puede servir, con el auxilio de una hipótesis muy plausible, para destruir la indeterminación del problema de la estabilidad de las bóvedas.

Llamemos p á la mayor presión media correspondiente á la curva de presiones mínimas de un perfil dado. Bastará para que el problema quede determinado admitir que:

«Si en dicho perfil, el valor de p es inferior al correspondiente de una bóveda construida, las presiones efectivas correspondientes al perfil proyectado serán también inferiores á las que se realizan en la bóveda construida.»

Como se ve, es una hipótesis que no puede repugnar á ningún constructor, y que una vez admitida justifica plenamente el empleo exclusivo de la curva de mínimas presiones.

Cierto es que colocada en dicho terreno la cuestión, se fijan las condiciones de estabilidad por mera comparación con tipos existentes, y no se trata ya bajo el aspecto más elevado que se considera en los problemas generales de la Mecánica aplicada; pero no debe perderse de vista que el problema de la estabilidad de las bóvedas no ha sido resuelto hasta la fecha bajo aquel aspecto, y que en las ciencias de aplicación debe concederse

más importancia á la experiencia y á la observación que á las hipótesis brillantes, si no están bien comprobadas.

Veamos ahora cuál es la curva de las presiones mínimas. Según M. Lattre es, para los arcos de medio punto, la que pasa por los puntos medios de las juntas de clave y de rotura. La razón en que se funda es que la variación de los puntos de paso de la curva no ejerce sino una influencia muy pequeña en el valor de la presión total, mientras que la ejerce muy considerable en el factor por el que ha de dividirse aquélla para obtener la presión máxima por centímetro cuadrado. M. Tourtay no sólo admite dicho razonamiento, sino que demuestra que es igualmente aplicable á las bóvedas rebajadas. Indicaremos el razonamiento de M. Tourtay para aclarar este punto importante.

Sean G y K (figura 1.ª) los puntos medios de las juntas de clave y de rotura, siendo esta última la de arranque para una bóveda rebajada. Sea

e , el espesor en la clave;

d , la distancia vertical GH;

Q , el empuje en la clave correspondiente á la curva GK.

La presión media en AB será $q = \frac{Q}{e}$.

Supongamos que se eleve el punto de aplicación G en una cantidad Δd .

La presión total disminuirá, y se convertirá en

$$Q' = \frac{Qd}{d + \Delta d}.$$

La presión máxima en la junta AB se calculará por la fórmula

$$p = \frac{P}{\Omega} (1 + 3n),$$

y será:

$$q' = \frac{Q'}{e} \left(1 + \frac{3\Delta d}{\frac{e}{2}} \right);$$

ó bien

$$q' = q \times \frac{d}{d + \Delta d} \left(1 + \frac{6\Delta d}{e} \right) = \frac{6qd}{e} \times \frac{\frac{e}{6} + \Delta d}{d + \Delta d}.$$

Se ve que el factor $\frac{\frac{e}{6} + \Delta d}{d + \Delta d}$, crece con Δd cuando $\frac{e}{6} < d$; condición que se verifica siempre en la práctica, pues d no difiere sensiblemente de la flecha.

En resumen; resulta de lo que precede que:

1.° La curva que debe considerarse exclusivamente es la de las mínimas presiones.

2.° La curva de las mínimas presiones es, en toda bóveda, la que pasa por los puntos medios de las juntas de clave y de rotura, coincidiendo esta última en los arcos rebajados con la de arranque.

3.° La presión máxima que corresponde á esta curva no es la presión máxima real que deberá resistir la bóveda; pero será admisible siempre que exista en buenas condiciones de estabilidad otra ya construída con materiales de igual resistencia que los que han de emplearse, á la cual corresponda una presión máxima mayor que la calculada.

III.—FÓRMULAS DE MM. LATERRADE Y TOURTAY

La fórmula de Laterrade tiene por objeto, según hemos indicado, la determinación de la presión media en la clave de una bóveda de medio punto en función de la luz, del espesor en la clave y de la altura de la sobrecarga en dicho punto. Entiéndese por luz el diámetro del círculo de intrados, cualquiera que sea el rebajamiento del arco.

Consideremos la sección ABCD (fig. 2.ª) comprendida entre la clave AB y la junta de rotura CD de una bóveda de medio punto, cuya sobrecarga tiene por sección AEFC y por altura sobre el trasdós en la clave AE, que llamaremos H. Supondremos que el perfil se haya trazado haciendo pasar un arco de círculo por el punto A y el C determinado, tomando una longitud DC = 2 AB en la junta de rotura y cuyo centro se halle en la vertical OE.

Sea $L = 2 BO$ la luz de la bóveda; $e = AB$ el espesor en la clave; p la presión media en la clave por centímetro cuadrado; S' , P' la superficie y el peso por metro lineal de cañón de la bóveda cuya sección es ABCD; S'' , P'' el área y el peso por metro lineal de la sobrecarga AEFC, y P el peso total de ambos, de modo que $P = P' + P''$.

M. Laterrade admite que la superficie de la bóveda ABCD es proporcional á e y á L ; de suerte que $S' = mL_e$, en que m es una constante que fija por tanteos, resultando en el caso de medio punto $m = \frac{3}{4}$; adopta,

pues, la fórmula empírica $S' = \frac{3}{4} L_e$, la cual, para arcos comprendidos entre 10 y 40 metros de luz, da las áreas con un error menor de un 2 por 100. Según esto, $S' = \frac{3}{4} L_e$, y $P' = 2.500 \times \frac{3}{4} L_e = 1.875 L_e$, admitiendo que el metro cúbico de bóveda pese 2.500 kilogramos.

La superficie S'' se compone del trapecio CFEO, menos la suma del sector OBD y de la superficie ABCD. La superficie del trapecio es

$$\frac{\sqrt{3}}{32} (3L + 4e + 8H) (L + 4e),$$

y la del sector $\frac{\pi}{24} L^2$, como es fácil comprobar.

Se deduce de aquí:

$$S'' = \frac{\sqrt{3}}{24} e^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right) Le + \sqrt{3} He + \frac{1}{8} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \right) L^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} HL =$$

$$0,866 e^2 + (0,116 L + 1,732 H) e + (0,0313 L + 0,433 H) L.$$

Admitiendo 1.800 kilogramos para el peso del metro cúbico de sobrecarga, se tiene $P'' = 1559 e^2 + (209 L + 3118 H) e + (56,3 L + 779 H) L$, y agregando $P' = 1.875 Le$,

$$P = 1.559 e^2 + (2.084 L + 3.118 H) e + (56,3 L + 779 H) L.$$

La presión total en la clave es IJ, y para calcular esta magnitud bastará expresar su valor en el triángulo IHJ, que da:

$$IJ = P \text{ tang. IHJ.}$$

Si HJ fuera perpendicular á DC, tang. IHJ, sería igual á tang. $30^\circ = 0,577$. Ahora bien; se observa en todos los trazados gráficos que la reacción HJ es sensiblemente perpendicular á la junta de rotura. El autor cita cuatro trazados de arcos comprendidos entre 10 y 40 metros, en que el mayor ángulo de dicha línea con la normal á la junta es de $4''$, y esto mismo hemos observado en otros cuatro trazados que hemos estudiado para comprobar nuestras fórmulas. Se comprende, pues, que considerando dicha reacción perpendicular á la junta de rotura, se cometerá un error tan pequeño que será inapreciable en el valor de la presión media que resulta de dividir dicha magnitud por el espesor en la clave. De este modo resultarán, sin embargo, valores algo menores que los verdaderos para luces inferiores á 30 metros. Se tiene, en este supuesto,

$$P \times 0,577 = 905 e^2 (1.202 L + 1.799 H) e + (32,5 L + 449 H) L.$$

Dividiendo esta expresión por 10.000 e, se obtiene:

$$p = 0,09 e + 0,12 L + 0,18 H + (0,0033 L + 0,045 H) \frac{L}{e}.$$

Para evitar la causa de error indicada, el autor aumenta en un décimo todos los coeficientes, adoptando para luces inferiores á 30 metros (únicas que nosotros consideraremos), la fórmula:

$$p = 0,10 e + 0,13 L + 0,20 H + (0,0036 L + 0,05 H) \frac{L}{e}.$$

Según las comprobaciones que cita el autor para arcos comprendidos entre 10 y 40 metros de luz, el error es, en general, inferior á un 2 por 100 y no excede de 8 por 100, aproximación muy suficiente en la práctica.

M. Tourtay, después de haber demostrado, según dejamos indicado, que los principios admitidos por M. Laterrade para arcos de medio punto son igualmente aplicables para los rebajados, aplica á éstos el mismo procedimiento, y deduce la fórmula general siguiente:

$$10.000 p = \left\{ \frac{1}{2} \pi' + (\pi - \pi') \frac{n'}{\operatorname{tg.} \alpha} \right\} e + \left\{ \frac{1}{2} \pi' + (\pi - \pi') \frac{m'}{\operatorname{tg.} \alpha} \right\} L + \pi' H \\ + \frac{1}{8} \left\{ (2 - \cos. \alpha) \cos. \alpha - \frac{\alpha}{\operatorname{tg.} \alpha} \right\} \pi' \frac{L^2}{e} + \frac{1}{2} \cos. \alpha \pi' \frac{LH}{e}.$$

En la cual π , π' , son los pesos del metro cúbico de fábrica y de sobrecarga, α el ángulo de la junta de arranque con la vertical, m' y n' dos coeficientes dados por las fórmulas

$$m' = -\frac{1}{2} \log. \operatorname{tang.} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$n' = \frac{1}{2} \operatorname{tang.} \alpha,$$

conservando L, H y e los mismos significados que anteriormente.

Aplicadas á los ángulos $\alpha = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 15^\circ$, resultan las siguientes fórmulas:

$$\alpha = 60^\circ; \text{rebajamiento } \frac{1}{3,46},$$

$$p = 0,125 e + 0,1166 L + 0,18 H + \left\{ 0,00337 L + 0,045 H \right\} \frac{L}{e},$$

$$\alpha = 45^\circ; \text{rebajamiento } \frac{1}{4,83},$$

$$p = 0,125 e + 0,1208 L + 0,18 H + \left\{ 0,0029 L + 0,0636 H \right\} \frac{L}{e},$$

$$\alpha = 30^\circ; \text{rebajamiento } \frac{1}{7,46},$$

$$p = 0,125 e + 0,1233 L + 0,18 H + \left\{ 0,00169 L + 0,0779 H \right\} \frac{L}{e},$$

$$\alpha = 15^\circ; \text{rebajamiento } \frac{1}{15,19},$$

$$p = 0,125 e + 0,1246 L + 0,18 H + \left\{ 0,00051 L + 0,0869 H \right\} \frac{L}{e}.$$

Estas fórmulas pueden emplearse como primera aproximación para rebajamientos distintos de los calculados, determinando los coeficientes por interpolación.

Las fórmulas de M. Laterrade y Tourtay podrían servir para calcular e fijando el valor de p. Pero observando que p varía muy poco con e y depende casi exclusivamente de la luz, resulta que para grandes luces hay

necesidad de admitir valores de p muy elevados, y para pequeñas luces muy pequeños, sin lo cual conducirían á valores de e completamente inadmisibles en la práctica. Creo, pues, preferible evitar los tanteos inútiles que esto ocasionaría fijando el valor de e por medio de las fórmulas empíricas usuales, y utilizando las que hemos estudiado para calcular los valores correspondientes de p ; no se conseguirá en general aumentar ó disminuir de una manera notable dicho valor variando el espesor en la clave; pero servirá de guía segura en la elección de materiales, y dada la resistencia de éstos, dará á conocer las condiciones en que han de quedar en la obra comparando el valor de p obtenido con los correspondientes á otras obras ya construídas.

IV.—TRAZADOS GRÁFICOS.

Hemos indicado que tanto M. Laterrade como M. Tourtay aconsejan llevar á cabo el trazado gráfico de la curva de presiones aunque para los tanteos preliminares se empleen sus fórmulas. Pero este trazado requiere ciertas precauciones para que sus resultados sean exactos, y que M. Laterrade aconseja que se verifique del modo siguiente:

Deben considerarse ocho dovelas entre la clave y la junta de rotura, y una vez determinado el empuje en la clave se compondrá con el peso de la primera dovela y la resultante dará la reacción de la segunda junta; si se sigue componiendo esta resultante con el peso de la segunda dovela y así sucesivamente, ocurrirá en general que no se llegará á obtener en la junta de rotura la verdadera reacción, á causa de los errores que se cometen en cada composición de fuerzas y que se van acumulando hasta producir un error importante en la última.

Para evitar esta causa de error, después de haber determinado como de ordinario el peso de cada dovela con su parte de sobrecarga, las verticales que pasan por los centros de gravedad de los pesos parciales, y los empujes totales en la clave y juntas de rotura, se halla el peso total y el centro de gravedad de las dovelas reunidas dos á dos, contando sus sobrecargas, y luego cuatro á cuatro. Se compone luego el empuje en la clave con el peso de las cuatro primeras dovelas y se obtiene un primer valor de la resultante sobre la quinta junta. Se tendrá una comprobación componiendo la reacción de la junta de rotura con el peso de las cuatro últimas dovelas. Se repite la operación hasta que ambas soluciones se confundan ó difieran muy poco, y en tal caso se toma una media. De este modo los errores parciales se corrigen en vez de acumularse. Del mismo modo y con análogas comprobaciones se obtienen las reacciones correspondientes á las juntas tercera y séptima, y finalmente las cuatro restantes.

Procediendo así se llega á trazar la curva de presión con gran exactitud.

tud; pero en cambio exigen estas operaciones mayor trabajo que el método ordinario.

Basta aplicar el método del polígono funicular en la composición de fuerzas, para simplificar extraordinariamente el trazado, conservando todas las comprobaciones indicadas y aun obteniendo otras nuevas en las operaciones de detalle. Ninguna particularidad ofrece este método, conocido de todos los Ingenieros; pero conviene, sin embargo, estudiar sus detalles para llamar la atención sobre las simplificaciones y comprobaciones que se obtienen, aplicándolo con las precauciones aconsejadas por M. Laterrade.

El trazado puede estudiarse en las figuras 3 y 3'. Se ha aplicado á una bóveda de 13 metros de luz y 1,90 de flecha; el radio es de 12,29; el espesor en la clave es de 0,80 metros y la longitud de la junta de arranque se ha fijado de modo que su proyección vertical sea igual al espesor en la clave. Haciendo pasar un arco de círculo cuyo centro esté en la vertical de la clave por estos puntos, se obtiene un perfil que se aproxima mucho al que resultaría de completar la bóveda y aplicar el método indicado para el medio punto. Ambas curvas de trasdós difieren poco de la *periciclóide* de Dejardin, y el trazado que indicamos es el adoptado por M. Tourtay, y al que se aplican sus fórmulas.

Para trazar la curva de presiones se ha empezado por obtener las ocho dovelas iguales y se ha supuesto que cada una recibe la sobrecarga que insiste en la parte correspondiente del trasdós, quedando aquella subdividida por planos verticales. Con objeto de facilitar la determinación de los centros de gravedad, se ha reducido la sobrecarga á un macizo de la misma densidad que la fábrica, para lo que basta reducir cada ordenada en la relación $\frac{2.500}{1.800}$, ó próximamente $\frac{3}{4}$. Se han determinado los pesos de cada dovela con su sobrecarga $P_1, P_2, P_3, \dots$, que se han contado desde una horizontal. Los extremos de estas rectas forman una curva continua, como se ve en la figura 3.^a, observación que basta para hacer notar un error importante en la determinación de los pesos. La composición de estos pesos, dos á dos, cuatro á cuatro, y finalmente la resultante total ó peso de la semi-bóveda con su sobrecarga, se ha efectuado por medio de dos polígonos funiculares arbitrarios, correspondientes á los polos o y o' . De este modo, cada una de las resultantes que se obtienen queda comprobada, puesto que se determinan dos de sus puntos, y además han de ser verticales. Así se obtienen los pesos de las dovelas reunidas dos á dos P''_1, P''_2, P''_3 , y P''_4 , reunidas cuatro á cuatro P'''_1 y P'''_2 , y, finalmente, el peso total P''''_1 . Desde el punto medio de la clave se traza una horizontal, que representa en posición el empuje en la clave Q , y uniendo el punto en que ésta corta á la P''''_1 con el medio de la junta de rotura, se tendrá, también en posi-

ción, la reacción R del apoyo. Dirigiendo ahora desde el punto R_q , (figura 3.^a), una paralela á R , se obtendrá el punto O'' , en que corta á la horizontal de R_1 , que será el polo del polígono de las fuerzas exteriores que obran sobre la media bóveda considerada, y este polígono será $O'' R_1 R_q$. Uniendo el polo O'' con los puntos $R_1 R_2 \dots R_q$, se tendrán las reacciones que obran sobre cada una de las juntas.

Fácil es ya, con estos datos, trazar la curva de presiones y verificar rápidamente todas las comprobaciones indicadas más arriba.

Para obtener las presiones medias correspondientes á cada junta, basta dividir las reacciones $O'' R_1 \dots O'' R_2 \dots O'' R_q$ proyectadas sobre las normales á las juntas (operación que puede omitirse sin inconveniente), por las longitudes de las mismas.

El siguiente cuadro indica claramente la marcha de las operaciones, y da á conocer los datos que figuran en ella.

N.º de orden de las dovelas	Su-perficie de las dovelas — Metros cuadrados.	Su-perficie de la sobrecarga. — Metros cuadrados.	Su-perficie total. — Metros cuadrados.	Peso de la dovela. — Kilogs.	Peso de la sobrecarga. — Kilogs.	PESO TOTAL.		Pesos P'. — Milimts	Pesos P''. — Milimts	Pesos P'''. — Milimts	N.º de orden de las juntas.	Presión media por centímetro cuadrado. — Kilogs.
						Kilogs.	Milimts.					
1	0,68	0,54	1,22	1.700	1.350	3.050	15,5	30,5	67,5	167,2	1	6,50
2	0,69	0,59	1,28	1.725	1.475	3.200	15,5				2	6,37
3	0,70	0,68	1,38	1.750	1.700	3.450	17,5				3	6,20
4	0,75	0,79	1,56	1.935	1.975	3.910	20,0	44,7	99,7		4	6,16
5	0,77	0,93	1,70	1.950	2.315	4.250	21,2				5	6,12
6	0,80	1,07	1,87	2.000	2.675	4.675	23,5				6	6,10
7	0,83	1,20	2,03	2.075	3.000	5.075	26,0	55,0			7	6,08
8	0,87	1,46	2,33	2.200	3.625	5.825	28,0				8	6,04
											9	6,22

Resulta una presión media en la clave de 6,50 kilogramos, y la fórmula de M. Tourtay da 6,55 kilogramos.

La única operación algo laboriosa que requiere este trazado es la determinación de los centros de gravedad; pero puede simplificarse notablemente admitiendo la descomposición en dovelas por juntas verticales. Este modo de división fué adoptado por M. Carvalho en un estudio analítico de la curva de presiones, y si bien es arbitrario, debe observarse que siempre tiene algo de arbitraria la subdivisión admitida para la sobrecarga, fundada en la dirección que se observa en las grietas de los tímpanos de las bóvedas ruinosas, observación que no se halla bien comprobada. En todo caso podrá juzgarse de la aproximación del trazado comparando sus resultados con los verdaderos. Al efecto, he aplicado este método á un arco de

medio punto de 20 metros de luz y de 1,20 metros de espesor en la clave, caso estudiado esmeradamente por M. Laterrade. La dificultad de hallar los centros de gravedad desaparece por completo adoptando esta descomposición en dovelas; he observado, en efecto, que la proyección horizontal de los centros de gravedad no difiere sensiblemente de la proyección de la intersección de las diagonales, al menos en las cuatro primeras dovelas. Es de advertir que, para que resulten ocho dovelas, es preciso dividir el arco de intradós en siete partes iguales. Puede estudiarse este caso en las figuras 4 y 4', y el cuadro siguiente resume todas las operaciones necesarias, pudiendo en él compararse los resultados de este trazado con los obtenidos por M. Laterrade para el mismo perfil.

N.º de orden de las dovelas	Superficies. — Metros cuadrados	PESOS.		Pesos P ⁱ .	Pesos P ⁱⁱ .	Peso P ⁱⁱⁱ .	N.º de orden. — Juntas.	Presión media según el trazado. — Kilogs.	Presión media según Laterrade (1).
		Kilogs.	Milimts.						
1	2,68	6.700	13,5	29,0	64,5	192,0	1	5,04	5,08
2	3,07	7.687	15,5				2	5,00	5,03
3	3,29	8.225	16,5				3	4,80	4,80
4	3,83	9.575	19,0	35,5	127,5	192,0	4	4,64	4,75
5	4,38	10.950	22,0				5	4,60	4,50
6	4,50	11.250	23,5				6	4,41	4,49
7	4,95	12.375	24,5	82,5			7	4,32	4,48
8	11,66	29.000	58,0				8	4,34	4,54
							9	4,75	4,69

Como se ve, el error mayor es de 0,20 kilogramos, y no llega al 5 por 100; y aun debemos advertir que resultan algo menores nuestras cifras, porque se ha considerado una altura de sobrecarga de 0,80 metros en vez de 1,00, que es la admitida por Laterrade, y que nuestros resultados no se refieren á las mismas juntas consideradas por aquel Ingeniero, puesto que no dividen al intradós en arcos iguales, como resulta forzosamente del trazado adoptado.

(Se concluirá.)

LUIS GAZTELU,

Ingeniero de Caminos.

(1) Hemos observado en el cuadro de la Memoria de M. Laterrade algunos errores materiales en la división de las reacciones sobre juntas por la longitud correspondiente. En el cuadro adjunto se han corregido esos errores.

MADRID: 1887.

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE GREGORIO JUSTE.

Calle de Pizarro, número 15, bajo.

ESTABILIDAD DE LAS BOVEDAS

Fig.^a 1.^a

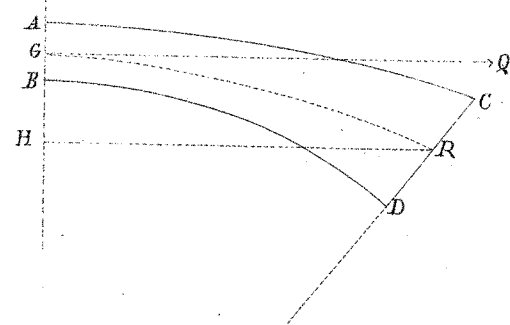


Fig.^a 2.^a

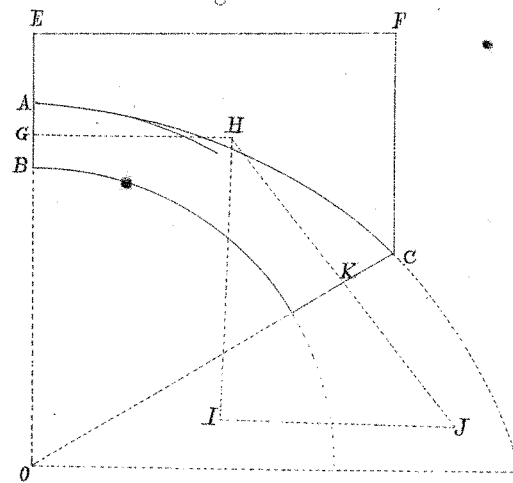


Fig.^a 3.^a

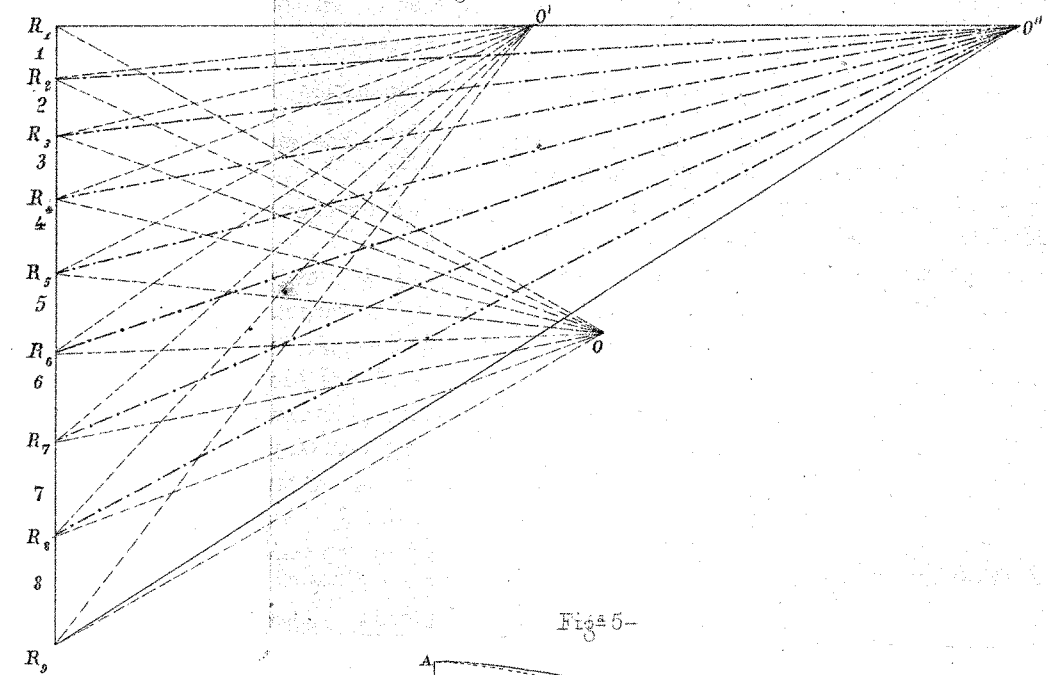


Fig.^a 3.^a

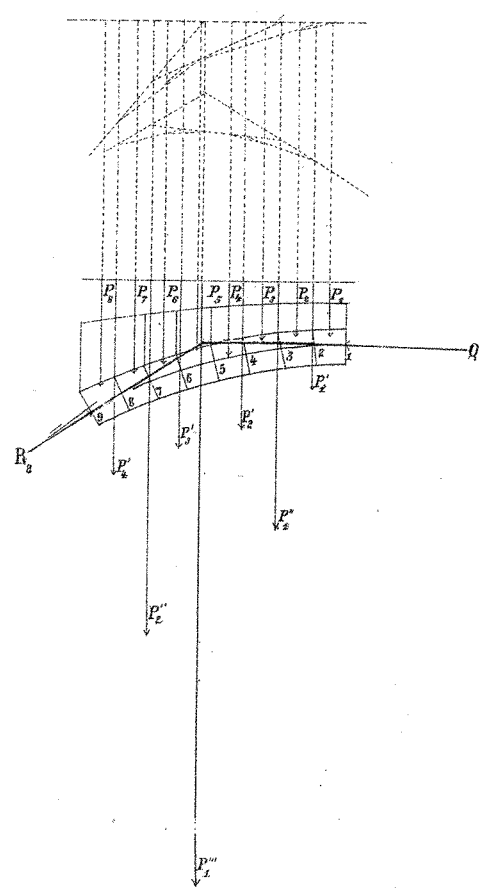


Fig.^a 4.^a

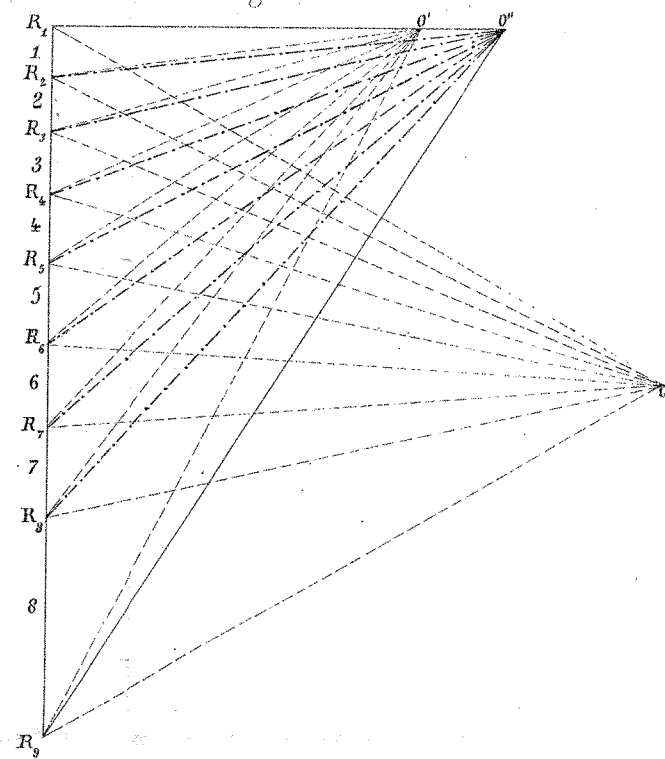


Fig.^a 4.^a

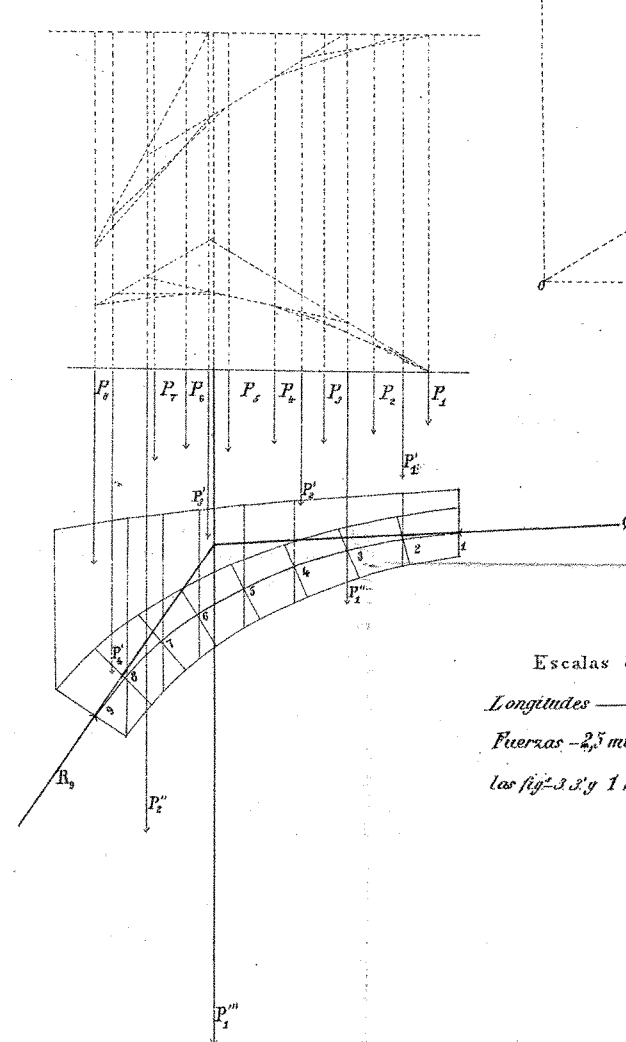
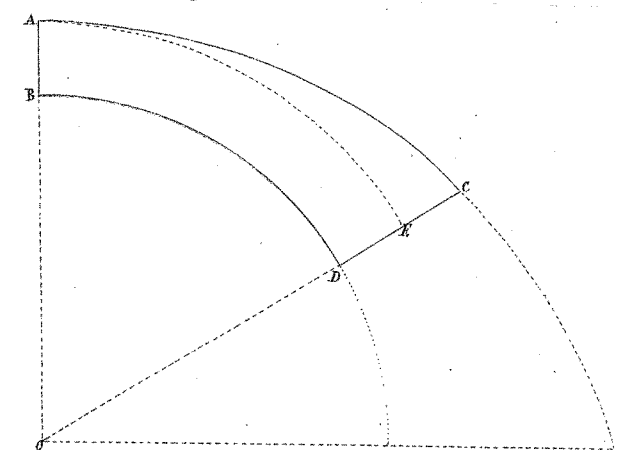


Fig.^a 5.



Escalas de las fig.^a 3, 3' y 4'.
 Longitudes — 1 por 200.—
 Fuerzas — 2,5 mil.^a por tonelada para
 las fig.^a 3, 3' y 4' 1 mil.^a para las fig.^a 4 y 4'.