

# NOTA SOBRE EL CÁLCULO DE ARCOS DE GRANDES LUCES,

POR EL SR. D. LEÓN BOYER.

(Continuación.)

Se conocen, pues, los desplazamientos  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  de todos los vértices del sistema en función de las mismas cantidades.

Si un vértice debe encontrarse después de la deformación sobre su superficie de apoyo  $F(xyz) = 0$ , se tendrá la relación:

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0. \quad (1)$$

La distancia entre dos puntos  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$ , vértices de una misma barra, cuya tensión se ha tomado por incógnita, aumentará por la deformación una longitud

$dl = (x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz')$ ; pero si  $\lambda$  es la tensión de la barra,  $\omega$  su sección y  $E$  su coeficiente de elasticidad, se tendrá:

$$dl = \frac{l\lambda}{E\omega},$$

y, por consecuencia, podrá ponerse:

$$\frac{l\lambda}{E\omega} = (x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz'). \quad (2)$$

El número de las ecuaciones (1) y (2) es exactamente igual al de las tensiones y reacciones desconocidas; si se reemplazan las cantidades  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  por sus valores en función de las fuerzas exteriores y de las desconocidas, se obtendrán estas últimas por la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado.

Como todas las ecuaciones de la Estática son lineales y sin término independiente con relación a las fuerzas exteriores, y a las tomadas como incógnitas, se tendrán las tensiones y reacciones respectivamente de todas las barras y los apoyos conservados, por medio de expresiones en que las fuerzas exteriores y las desconocidas entrarán en el primer grado y sin término independiente. Si se introducen estas ecuaciones en la (1) y (2), se obtendrán relaciones de primer grado sin término constante.

De aquí resulta que la tensión de una barra, ó la reacción de un apoyo, debida á la aplicación de un sistema de fuerzas, es igual á la suma de las tensiones producidas en la barra, ó de las reacciones desarrolladas en el apoyo por cada una de las fuerzas del sistema considerado.

Esto supone que todos los apoyos son fijos, ó á lo menos que la reacción de la superficie es proporcional á su desplazamiento según la normal.

III. *Aplicación del método á un sistema cuya forma está completamente definida por la longitud de las barras.*—Se supondrán quitadas un cierto número de barras, de manera que el sistema, si bien queda definido en su forma por la longitud de las conservadas, no tenga exceso de ellas.

Se supondrán suprimidas un cierto número de superficies de apoyo, de tal manera que, después de esta supresión, la posición geométrica del sistema quede definida por los apoyos conservados sin que haya exceso de ellos.

Se tomarán como incógnitas las tensiones de las barras y las reacciones de los apoyos suprimidos, y se expresarán enseguida las tensiones y reacciones de las barras y apoyos conservados, en función de las fuerzas exteriores y de las desconocidas.



Fig. 3.

Las fórmulas de deformación se establecen del siguiente modo: Sean A y B los extremos de una barra suprimida; apliquemos á ellos dos fuerzas iguales á la uni-

dad, dirigidas según la barra y en sentido contrario, y calculemos por las fórmulas de la Estática las tensiones de las barras del sistema reducido en función de estas dos fuerzas, supuestas actuando solas; sea  $\varphi$  una de estas tensiones. El sistema está en equilibrio y, por consecuencia, en virtud del teorema del trabajo virtual, la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las fuerzas  $\varphi$  es nula para todo desplazamiento infinitamente pequeño del sistema; esto tendría lugar, por consiguiente, para el desplazamiento que habrían engendrado las fuerzas dadas. Si, pues,  $(df)'$  es el alargamiento de una barra bajo la acción de este sistema de fuerzas, y si  $dl$  es el de la línea AB, se tendrá:

$$dl = \sum \varphi (df)',$$

$$y \quad (df)' = \frac{\varphi' f}{ES};$$

representando  $\varphi'$  la tensión de la barra  $f$  bajo la acción del sistema dado,  $f$  su longitud y  $S$  su sección.

Ahora bien;

$$dl = \frac{\lambda l}{E\omega};$$

se tiene, pues,

$$\frac{\lambda l}{E\omega} = \sum \varphi \frac{\varphi' f}{ES} \quad (1)$$

Se ve desde luego que  $\varphi$  es enteramente conocido, pues depende tan sólo de las disposiciones geométricas de la construcción.

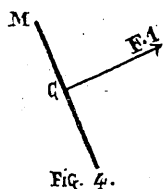


Fig. 4.

Sea C un vértice de apoyo, que debe insistir sobre la superficie M, cuya reacción se ha tomado por incógnita; apliquemos al punto C una fuerza normal á M é igual á la unidad, y calculemos las tensiones  $\pi$  de las barras del sistema reducido bajo la acción de esta única fuerza. Dando á este sistema en equilibrio el desplazamiento que originan las fuerzas primitivas en el sistema completo, se tendrá:

$$d = \Sigma \frac{\pi \varphi' f}{ES},$$

siendo  $d$  la distancia del punto C á la superficie M después de la deformación.

Pero  $d$  debe ser nulo; se tiene, pues:

$$\Sigma \frac{\pi \varphi' f}{ES} = 0. \quad (2)$$

Si el apoyo M no fuese absolutamente fijo y se tuviera

$$d = kR,$$

siendo  $k$  un coeficiente constante y  $R$  la reacción del apoyo, se tendría:

$$kR = \Sigma \frac{\pi \varphi' f}{ES};$$

así es que, como las tensiones  $\varphi'$  son conocidas en función de las fuerzas exteriores y de las tensiones ó reacciones desconocidas, las ecuaciones (1) y (2), que son de primer grado, darán estas incógnitas.

Si la forma de la construcción no estuviese enteramente definida por la longitud de sus barras, y se encontrase completada por un cierto número de apoyos, el método sería idénticamente el mismo, pero el sistema reducido debería comprender, además de los apoyos necesarios para definir la posición geométrica del sistema supuesto invariable, el número de ellos requerido para completar la determinación de su forma.

Se ve, pues, cuán sencillamente resuelve problemas de geometría bastante complicados el empleo del teorema del trabajo virtual.

IV. *Caso particular de un sistema de diagonales sencillas.*—Teorema de las tres tensiones. Este sistema se hará, en general, calculable por la

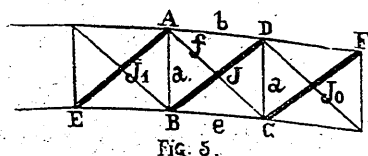


Fig. 5.

Estática, suprimiendo las barras indicadas en la figura 5.\* por una doble raya.

El alargamiento de las barras BD del segmento ABCD está determinado en cuanto se conocen

los de las otras cinco barras. Si, por ejemplo, ABCD es un paralelogramo, se tiene:

$$aa_1 \left( \frac{da}{a} + \frac{da_1}{a_1} \right) + bdb + ede - fdf - j dj = 0,$$

ó también si  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  y  $\chi$  son las tensiones de las barras y  $S$ ,  $S_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ ,  $\omega$  y  $\omega_1$  sus secciones:

$$aa_1 \left( \frac{\alpha}{ES} + \frac{\alpha_1}{ES_1} \right) + \frac{b^2}{E\Omega} \beta + \frac{e^2}{E\Omega_1} \varepsilon - \frac{f^2}{E\omega} \varphi - \frac{j^2}{E\omega_1} \chi = 0;$$

pero  $\beta$ ,  $\varepsilon$  y  $\varphi$  son únicamente función de las fuerzas exteriores, comprendidas las reacciones de los apoyos y de la tensión desconocida de la barra BD; la tensión  $\alpha$  es función de las mismas cantidades y además de la tensión de la barra CF, y la  $\alpha_1$  es función de las mismas cantidades, más de la barra AE. Introduciendo las expresiones de estas fuerzas en la relación anterior, se obtendrá una fórmula

$$A + B\chi_0 + C\chi + D\chi_1 = 0, \quad (1)$$

en la que A es una expresión lineal y sin término constante de las fuerzas exteriores conocidas ó desconocidas; B, C y D son coeficientes constantes, y  $\chi_0$ ,  $\chi$ ,  $\chi_1$  las tensiones de las barras CF y AE.

(Se continuará.)

## MEMORIA SOBRE EL RENACIMIENTO,

POR

DON TEODOSIO ALONSO PESQUERA

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.

PREMIADA EN LOS JUEGOS FLORALES DE VALLADOLID.

(Continuación)

Vió allí los cuadros que llegaban de Italia y los Países Bajos; pero no ejercieron sobre él tanta impresión como los de su compatriota Luís Tristán, bellos por el color y la viveza de su expresión; sin embargo, su maestro favorito fué siempre la *naturaleza*, imitándola con escrupulosidad. tanto en el tono cuanto en la forma de los objetos, dando igual importancia al principal que al más insignificante de los detalles, lo que perjudica algo las obras de esta su primer época, á la cual pertenecen los *Borrachos*. Una vez en Madrid, su tío el canónigo Fonseca le proporciona relaciones para el Conde Duque, quien le presenta en la Corte, que se llena de admi-