

LONGITUDES VIRTUALES

DE

UN TRAZADO DE CAMINO DE HIERRO

POR

M. CHARLES BAUM

EXTRACTADO POR M. P. M. LEFÈVRE.

M. Baum, en un importante é interesantísimo estudio publicado en los *Anales des Ponts et Chaussées* de Junio próximo pasado, expone que en todo trazado de camino de hierro existen diversas longitudes virtuales, según que se considere la línea que se trata de construir bajo cada uno de los puntos de vista siguientes: 1.º Del trabajo mecánico ó de la resistencia. 2.º De los gastos de explotación. 3.º De los gastos relativos al transporte propiamente dicho. 4.º De los gastos de tracción. 5.º De los precios de las tarifas. Y 6.º De la velocidad.

Este estudio se refiere principalmente á la longitud virtual de un trazado considerado bajo el punto de vista del trabajo mecánico, definido de la manera siguiente: «La longitud virtual relativa al trabajo mecánico de una línea férrea *A B* en rampa y en curva, es la longitud de un trazado ideal horizontal y rectilíneo, sobre el cual el trabajo que hay que desarrollar (ó la resistencia que hay que vencer) á igualdad de velocidad para el transporte de una tonelada de peso bruto, es el mismo que sobre la línea *A B*.»

El autor, después de varias consideraciones sobre el particular, producto de sus investigaciones, deduce:

«Que la longitud virtual relativa á las resistencias es, entre todas las longitudes virtuales de un trazado, la que se puede determinar con mayor aproximación.»

De la definición de longitud virtual, relativa á la resistencia de un camino, resulta que si se tienen varias soluciones para el trazado de una línea férrea entre dos puntos dados, debe darse la preferencia, en igualdad de las demás condiciones, á aquélla cuya longitud virtual sea la menor, con lo que se conseguirá por regla general que el servicio de explotación sea el más fácil y exija los menores gastos.

M. Baum enumera los diferentes métodos inventados hasta ahora para la determinación de las diversas longitudes virtuales, y propone después, para calcular la longitud virtual relativa al trabajo mecánico, un nuevo método, del que hace algunas aplicaciones.

A continuación reproducimos, casi textualmente, cuanto ha publicado respecto de la determinación de las diversas longitudes virtuales.

CAPÍTULO PRIMERO.

Métodos para el cálculo de las longitudes virtuales.

M. Baum agrupa los diversos métodos conocidos en los tres sistemas siguientes: 1.º Sistema fundado sobre la determinación de la resistencia mecánica que hay que vencer. 2.º Sistema fundado sobre el cálculo del gasto total de explota-

ción. Y 3.º Sistema fundado sobre el cálculo del gasto relativo al transporte propiamente dicho.

PRIMER SISTEMA.—*Longitud virtual relativa al trabajo mecánico.*

Método inglés de 1838. Este método, el primero que se ha dado para el cálculo de las longitudes virtuales, consiste en determinar experimentalmente las longitudes horizontales equivalentes á las rampas y pendientes que existen en el trazado, sin tener en cuenta las resistencias originadas por las curvas.

Las experiencias se hicieron con cuatro clases de máquinas y con trenes, cuyas cargas brutas, en las cuales se comprendían el peso de la máquina y tender, variaron entre 30 y 100 toneladas, y los resultados obtenidos se consignaron en ocho tablas.

Método de Ghéga. El Ingeniero Ghéga fué el primero que empleó la palabra *longitud virtual* en un trabajo publicado en 1844, y en su método se tienen en cuenta las resistencias debidas á las rampas y las que proceden de las curvas.

La fórmula siguiente determina la longitud virtual de un trazado, expresada en pies ingleses:

$$V = l \left(i + \frac{280}{m} \right) + 1,256 z$$

en la que *i* representa la pendiente de la línea, *l* la longitud real de la misma, y *z* la suma de los ángulos en el centro de todas las curvas dividida por 360°; 280 representa el peso bruto del tren, que corresponde á una resistencia igual á la unidad. El término $l \left(i + \frac{280}{m} \right)$ representa la longitud virtual relativa á las rampas, y el término 1,256 *z* se refiere á la resistencia debida á las curvas, y resulta de experiencias hechas por Ghéga en 1842.

Fórmula de M. Claudel. M. Claudel presenta en la tercera edición de su libro *Formules, tables et reinsegnements pratiques*, publicada en 1854, una fórmula general obtenida por medio de cálculos y experiencias practicadas por diversas personas y varias Compañías de ferro-carriles, en la que se determina la resistencia total que se opone al movimiento de un wagon sobre una alineación curva y en rampa, y M. Baum, después de reproducir esta fórmula, dice respecto á ella:

«Aunque muy completa, bajo el punto de vista del cálculo de todas las resistencias á que se encuentra sometido un vehículo, esta fórmula no es de una aplicación práctica por la incertidumbre en que se está respecto á la exactitud de algunos de los coeficientes indicados por el autor, y por otra parte, en ella se tienen en cuenta las resistencias que se oponen al movimiento de los coches y wagones, mas no las relativas á las máquinas.»

Métodos usados en Sajonia y Baden. La Dirección de los Caminos de hierro del Estado de Sajonia ha aplicado durante mucho tiempo la siguiente fórmula (Las longitudes están expresadas en pies sajones de 0.^m282):

$$L' = L + 121,444 (h + h') + 17,3755 \Sigma z$$

en la que L' representa la longitud virtual, L la longitud real del trazado, h la suma de las alturas que hay que subir siguiendo el trazado en un sentido, h' la suma de alturas que hay que subir siguiendo el trazado en sentido inverso, y $\Sigma \alpha$ la suma de los ángulos en el centro de todas las curvas.

Los coeficientes 124,444 y 17,3755 se han determinado por medio de datos estadísticos correspondientes á los años 1858 y 1859.

Esta fórmula tiene el inconveniente de suponer un radio medio para todas las curvas del trazado. Hoy está abandonada, y se la ha reemplazado por la siguiente, que sin proporcionar mayor grado de aproximación, es más complicada que la anterior:

$$L' = L + \frac{Q}{2W} (h + h') + 0,008727 f \frac{Q}{W} (s + b) \Sigma \alpha.$$

En la que las letras comunes con la fórmula anterior tienen la misma significación que en ésta. Q representa el peso del tren, W la resistencia que se opone al movimiento del tren sobre una rasante horizontal y rectilínea á la velocidad de V metros por segundo, calculada segun Redtenbacher, f coeficiente de deslizamiento de las ruedas, s ancho de la vía, y b separación de los ejes.

La Dirección de los Caminos de hierro del Estado de Baden hace uso de la fórmula siguiente para distribuir entre las diferentes secciones de un camino de hierro, teniendo en cuenta sus perfiles longitudinales, los gastos de tracción:

$$L = l + 200 h + 4c$$

en la que L representa la longitud virtual, l la longitud real, h la altura que se ha subido, y c la suma de los ángulos en el centro de todas las curvas: expresión que, como se ve, es muy análoga á la primera fórmula sajona.

Fórmula de M. Koch. M. R. Koch propone la siguiente fórmula para determinar la resistencia que se opone al movimiento de un tren de mercancías que marcha á pequeña velocidad, teniendo solamente en cuenta la influencia de las rampas y despreciando la de las curvas.

$$Z = \frac{P}{1000} (1 + 0,04V) + \frac{4000}{x} + \frac{Q}{1000} \times (M + 0,044V^2 + \frac{4000}{x})$$

en la que Z representa la resistencia total que se opone á la marcha del tren, P el peso del tren en kilogramos, V la velocidad expresada en kilómetros por hora, Q el peso de la máquina, $\frac{4}{x}$ la rampa del trazado que se considera, y M un coeficiente variable con la clase de máquina que se emplee para remolcar el tren.

M. Welkner asigna á M los valores 6, 8 ó 12, segun que la máquina empleada sea de ejes libres, de dos ó de tres ejes acoplados.

Los coeficientes 0,04 y 0,00444 han resultado de experiencias practicadas en los caminos de hierro de Colonia á Minden, empleando trenes cuya velocidad media era de 32^k,537 por hora.

Método de M. Abt, Ingeniero suizo. La fórmula propuesta por M. Abt para determinar la resistencia total por tonelada, es la siguiente:

$$R = (a + bv) k + x$$

en la que v representa la velocidad, x la rampa, k coeficiente del aumento de resistencia debido á las curvas, variable de 2,80 á 1 para curvas cuyos radios varíen de 200 á 800 metros, $a = 0,0017$ y $b = 0,008$.

Fórmulas de M. Lindner, Ingeniero suizo. Las fórmulas propuestas por M. Lindner en un trabajo publicado por este Ingeniero en 1879, no expresan de una manera completa la longitud virtual de un trazado bajo el punto de vista de las resistencias que oponen al movimiento de un tren las rampas y las curvas.

El procedimiento que emplea consiste en calcular separadamente la longitud virtual bajo el punto de vista de las resistencias originadas por las rampas, y la que se refiere á las que oponen las curvas.

Si L representa la longitud real de una sección en rampa, la longitud virtual correspondiente á esta sección será La , en la que a está determinado por la expresión siguiente:

$$a = \frac{(1,65 + 0,05V) \cos \alpha \pm 4000 \sin \alpha}{1,65 + 0,05V}$$

la que se convierte en el caso en que la rampa sea inferior á 0,04 en

$$a = 1 \pm \frac{m}{2,45 + \sqrt{0,49 - 0,0125m}}$$

y en

$$a = \cos \alpha \pm \frac{m \cos \alpha}{2,45 + \sqrt{0,00125m - 0,05}}$$

cuando la rampa es superior á 0,04.

En estas dos fórmulas, α designa la inclinación de la rampa y $\frac{1}{m}$ el coeficiente de resistencia sobre una rasante horizontal y rectilínea, determinado por medio de la fórmula de MM. Vuillemin, Dieudonné y Guébhard.

Del mismo modo, si L es la longitud real de una sección en curva, Lb será la longitud virtual de esta sección bajo el punto de vista de las resistencias debidas á las curvas.

Los coeficientes a y b se encuentran en ocho tablas formadas por M. Lindner, y con su auxilio se determina la longitud virtual de un trazado, tomando el término medio entre las longitudes que resultan, considerando el trazado primero en un sentido y después en el inverso.

M. Baum, después de examinar este método, encuentra es algo defectuoso, porque asemeja la resistencia por tonelada de las máquinas y tenders á la de una tonelada de tren.

Fórmula de M. Stocker, Ingeniero-jefe de tracción en el ferro-carril de San Gotardo. Si V representa la longitud real del camino, V la longitud virtual, m la rampa ó pendiente en milímetros, y R el radio de la curva, la longitud virtual está dada por la expresión

$$V_i = V \left(1 + 0,3447 m + 0,00319 m^2 + \frac{0,233 + 0,0052 m}{R} \right)$$

para el caso en que se considere una rampa y una curva, y

$$V_r = V \left(1 - 0,265 m + 0,00372 m^2 + \frac{0,233 + 0,0052 m}{R} \right)$$

para el en que se trate de un trozo en pendiente y curva.

En estas dos fórmulas el término

$$\frac{0,233 + 0,0052 m}{R}$$

expresa el aumento de longitud virtual debido a la resistencia de las curvas.

M. Baum, al tratar de las hipótesis en que está fundada la determinación de las fórmulas anteriores, dice: «M. Stocker admite que la resistencia que una rampa opone al movimiento de una tonelada de máquina, es triple de la correspondiente a una tonelada de vehículos. En las curvas supone a la primera doble de la segunda»

Comparación de las fórmulas. Para establecer la debida comparación entre los diversos procedimientos expuestos, M. Baum ha formado un cuadro, en el que aparecen las longitudes virtuales calculadas por los diversos métodos para el caso de un trozo de camino en alineación recta, y en que las rampas varían de 5 en 5 milímetros desde 0^m,001 a 0,030, y del exámen de dicho cuadro se deduce que para una misma rampa, la longitud virtual correspondiente es mayor a medida que la fórmula empleada para determinarla era más moderna, lo que es debido, según M. Baum, a que cada vez se han tenido en cuenta mayor número de elementos que influyen en la longitud virtual.

SEGUNDO SISTEMA.—Longitud virtual relativa a los gastos de explotación.

M. Baum dice en su trabajo, a propósito de la longitud virtual, considerada bajo el punto de vista de los gastos de explotación: «Los Ingenieros que se han ocupado de esta cuestión, se han limitado a consignar una fórmula que exprese los gastos de explotación en una línea en rampa y en curva, sin deducir de ella la correspondiente a la longitud virtual del camino.» Una vez conocidos por medio de cualquiera de las fórmulas los gastos de explotación para una línea dada, bastará dividirlos por los correspondientes a un camino en rasante horizontal y rectilínea de la misma longitud que la línea dada para obtener la longitud virtual correspondiente. A continuación indicamos las principales fórmulas que sirven para determinar los gastos de explotación.

Fórmula de Minard. En un estudio publicado en 1844, M. Minard llega a la fórmula siguiente: «El gasto de explotación bajo el solo punto de vista de la influencia de la pendiente cuando ésta no es extraordinaria, no excede en general del 3 por 100 de los gastos generales.»

«Las pendientes a que M. Minard se refiere en su fórmula no exceden de 0,005 ó 0,006; supone

además que para los trenes que marchan en gran velocidad, el aire y los rozamientos oponen una resistencia próximamente igual al esfuerzo necesario para subir una pendiente de 0,0005.

Fórmula de M. Röckl, Ingeniero bávaro. La fórmula de M. Röckl, conocida desde 1860, para determinar los gastos de explotación, es la siguiente:

$$D = 3600 + 210,000 R$$

en la que D está expresado en florines bávaros y

R se determina por la fórmula $R = \frac{1}{280} + i + c$:

siendo i la rampa más fuerte expresada en milímetros que hay en toda la sección, y c la resistencia debida a la curva de menor radio de la sección transformada en resistencia equivalente a la que opone una rampa.

M. Röckl asigna a c valores que se deducen del siguiente estado, que manifiesta la equivalencia entre las curvas de diferente radio y las rampas, bajo el punto de vista de la resistencia que oponen a la marcha de un tren:

RADIO DE LAS CURVAS.	RAMPAS CORRESPONDIENTES.
Metros.	Metros.
300. . . .	0,00625
360. . . .	0,00530
450. . . .	0,00357
540. . . .	0,00240
600. . . .	0,00140
Superior a 700. . . .	0,00000

Los valores de R y D obtenidos por medio de estas fórmulas, son muy elevados, como debía suceder, porque M. Röckl, sin tener en cuenta la intensidad del tráfico, supone que la rampa de mayor pendiente y la curva de menor radio se aplican a toda la longitud de la sección.

Fórmula de M. de Freycinet. Encargado M. de Freycinet en 1861 de la explotación de los caminos de hierro del Mediodía de Francia, publicó un tratado de pendientes económicas de las líneas férreas, en el que existe una fórmula para la expresión del gasto de explotación sobre una rampa, con el auxilio de la cual puede determinarse la longitud virtual total, ya bajo el punto de vista de los gastos de explotación, ya bajo el que se refiere a los gastos de transporte.

Fórmula de M. Heyne, Ingeniero austriaco. La fórmula propuesta por este Ingeniero para determinar los gastos de explotación, se refiere tan sólo a la resistencia que oponen las rampas prescindiendo de la que originan las curvas. Tiene la forma siguiente:

$$R'' = c' + 0,182 E' + \frac{(c' + 0,182 E') 40.6}{g}$$

en la que R'' representa los gastos anuales por milla (7^k,5859), expresados en florines austriacos (2^r,50), E' el producto bruto anual por milla, $\frac{1}{g}$ la rampa del camino, c' una cantidad variable con E' , si $E' \leq 75.000$ florines, $c' = 13.470$

florines; y si $E' > 75.000$ florines, $c' = 23.070$ florines.

Métodos italianos. En 1865 ha propuesto el Ingeniero italiano M. Bombeaux una fórmula para calcular las longitudes virtuales. Dicho Ingeniero supone que cuando las rampas no exceden de 0,006, los gastos de explotación son equivalentes á los de una línea en rasante horizontal, si el tráfico en los dos sentidos es el mismo, y ha deducido que, para el caso en que las rampas presenten una pendiente superior á 0,010, el término adicional de la longitud virtual relativa á los gastos de explotación es $60 H$, siendo H la altura que hay que subir.

El Ingeniero italiano M. Ruva aplica las siguientes cifras al cálculo del aumento de los gastos de transporte propiamente dicho, producido por la influencia de rampas de diversas inclinaciones:

RAMPAS.	COEFICIENTES DE AUMENTO DE LOS GASTOS DE TRANSPORTE.
0,006.	1.00
0,012.	1.50
0,018.	2.00
0,024.	2.50

El coronel La Nicca publicó en 1864 los siguientes resultados:

RAMPAS.	PROGRESION DE LOS GASTOS DE EXPLOTACION CORRESPONDIENTES.
0,007.	10
0,010.	12
0,018.	18
0,020.	20
0,025.	25

Segun el cuadro que antecede, se deduce que los gastos de explotación serian casi proporcionales á las rampas.

(Se continuará.)

BIBLIOGRAFIA.

ARITMÉTICA por A. J. N. Pague.—Traducción de G. Fernandez de Prado.—Madrid, 1881.—Librería de F. Travedra, Arenal, 6.

Es indudable que las ciencias físicas y matemáticas son, de todas las ramas del saber, las que hacen sentir de una manera más tangible, esa ley fatal del espíritu humano llamada progreso; cada día, cada hora, se enriquecen con nuevos materiales, y lo que ayer era tan sólo una simple enumeración de hechos aislados, revelados por la observación y confirmados por la experiencia, aparece hoy una ciencia acabada, cuyos hechos no son otra cosa que corolarios encerrados en una sencilla fórmula matemática que es la

expresión de una ley general. Y es de notar que en el fondo de tan maravillosa evolución, se encierra una tendencia marcada, un fin preconcebido, claro y perfectamente definido: *la unidad*. Pero dentro de esta tendencia armónica hay, sin embargo, una gran variedad en el desenvolvimiento de estas ciencias, ocurriendo no pocas veces que el estudio de determinada cuestión, ha puesto ante la vista nuevas y fecundas vías que permiten ensanchar más y más el círculo de los conocimientos. Así, deslumbrados los matemáticos por la prodigiosa invención del Cálculo infinitesimal, todos sus esfuerzos se dirigieron hacia esta rama de la ciencia; pero no obstante la elegante sencillez de sus métodos, lo complejo de las ideas, hizo sentir bien pronto la necesidad de concretarlas; esto provocó una reacción en favor de la Geometría, dando origen así á la Geometría moderna, tan fecunda en sorprendentes resultados. Claro está que una ciencia tan fundamental como la Aritmética, no podía permanecer ajena á este movimiento progresivo, y numerosos trabajos acerca de las propiedades de los números se sucedieron en estos últimos años, debidos á la pluma de ilustres matemáticos. En el número de éstos ocupa un lugar preferente el sabio profesor del Ateneo de Lieja, autor del libro que motiva estas líneas, cuyas principales teorías, aun cuando sea de una manera somera, vamos á señalar á la ilustrada consideración de nuestros lectores.

Concebida en un plan eminentemente racional, domina en toda la obra un criterio uniforme, lo que, no sólo facilita notablemente su comprensión, sino que auxilia también de una manera poderosa la memoria. Por otra parte, comprendiendo M. Pague que el carácter distintivo de una ciencia no está en la forma material del juicio, sino en la naturaleza de los términos que éste relaciona, rompe resueltamente con la antigua preocupación que proscribía el empleo del lenguaje simbólico en Aritmética, privándola de ese modo de tan poderoso medio de investigación.

La numeración de los números enteros comienza por el análisis de los elementos que constituyen el sistema de representación numérica, y termina luego por una metódica exposición del sistema de enunciación. Las cuatro operaciones fundamentales hallanse cuidadosamente definidas segun los motivos á que deben su origen, y á continuación, fundados en estas definiciones, están desarrollados con notable rigor los métodos de su cálculo, siguiendo las operaciones de descomposición el método analítico, y desechando artificios de cálculo que nada ilustran acerca de la naturaleza de la operación, mientras que, por otra parte, exigen prodigios de memoria.

La divisibilidad fundada en la fecunda teoría de los residuos, se halla completada de una manera general y brillante en la teoría general de los sistemas de numeración, que á su vez está expuesta con tanta extensión como notable acierto. En la teoría de las fracciones ordinarias, despues de estudiar las variaciones que éstas experimentan, segun las que sufren sus términos, aborda el autor el problema general de la trasformación; establece luego las reglas de su cálculo, generaliza la teoría, y presenta á continuación la de las proporciones bajo el título de *teoría de igualdad de fracciones*, en la que rechaza la conocida terminología proporcional por inútil é inconveniente. Es notable por más de un concepto la teoría de las fracciones periódicas, que comienza por el estudio de los caracteres de reductibilidad, conteniendo valiosas investigaciones acerca de los números de cifras periódicas y no periódicas, y termina por una brillante exposición de los métodos de trasformación. Las teorías de las raíces cuadrada y cúbica son tan completas como notables, encerrando numerosas investigaciones acerca de los caracteres de irracionalidad. Dignas de especial mención son también las teorías de las progresiones y de los logaritmos, particular-