

res general, deben considerarse bajo dos puntos de vista distintos: como vías destinadas á facilitar y hacer más económicos los trasportes y las comunicaciones, reportando con ello al país ó la comarca los beneficios consiguientes, y como empresas mercantiles en las cuales se trata de obtener un interes razonable para los capitales invertidos.

(Se continuará.)

RESISTENCIA DE MATERIALES.

Método nuevo para el trazado de la curva de presiones en las bóvedas de fábrica,

POR

M. SZYSTOWSKI.

(Continuación.)

Las curvas de que hablamos sólo las construyó Mr. Peaucellier para las juntas de arranque; pero es fácil repetir esta construcción para todas las de la bóveda considerada, y superponer en seguida las zonas así encontradas, una sobre otra. Determinaremos por esta superposición un cierto contorno, en el cual estarán contenidos todos los empujes que se producen en la clave, para los cuales la curva de presiones permanece siempre encerrada en el contorno de que no debe salir; es decir, entre el intrados y el trasdos.

Para evitar esta serie de operaciones, muy largas y laboriosas, hé aquí el método á que se puede recurrir:

Consideremos una bóveda $J_0 j_0$ Hh y una junta cualquiera $J_0 j_0$; tracemos una hipérbola mn , cuyas ordenadas MM' en cada punto de la clase $J_0 j_0$ representen el empuje P . Compongamos el empuje P con la fuerza R , y obtendremos una resultante que pasará por el punto j . Sabemos, por otra parte, que la fuerza R es la resultante de las fuerzas exteriores que obran sobre la porción de la bóveda $J_0 j_0$ jJ ; tracemos ahora por el punto j una tangente jO al intrados, y por el punto O de intersección de la tangente con la fuerza R , tiremos una horizontal OMM' que encuentre á la junta de la clase en el punto M de aplicación del empuje P , que está representado sobre la figura por la recta MM' .

Supongamos que la junta $J'j'$ se encuentra á una distancia infinitamente pequeña de la junta Jj , y hacemos por esta nueva junta una hipérbola ts .

Peaucellier demuestra que esta nueva hipérbola ts cortará á la primera mn en el punto M' .—Si consideramos el punto M' como perteneciente á la curva formada por las intersecciones sucesivas de una serie de hipérbolas correspondientes á los diferentes puntos del intrados, el trazado de esta curva envolvente reemplazará ventajosamente á todas las operaciones que deberíamos efectuar siguiendo el método general.—La observación que acabamos de hacer permite enunciar el problema en los términos siguientes: «Hallar el lugar geométrico de los puntos M' , es decir, la curva de los empujes tal, que la resultante de las fuerzas P y R permanezca siempre tangente al intrados.»

Para resolver este problema, emplea Mr. Peaucellier una curva auxiliar que determina de la manera siguiente:

Llamamos $P=MM'$ al empuje en la clave; tomando los momentos, con relación al punto j se tendrá

$$P \times MK = R \times jf = W$$

representando por W el momento de la fuerza R con relación á j .

Admite, después, que la ecuación anterior se satisface también para el punto j' colocado á una distancia infinitamente pequeña del punto j , cuando el valor del empuje P y su punto de aplicación sobre la junta $J_0 j_0$ de la clave, permanecen los mismos.

En efecto, introduzcamos en la ecuación precedente los valores correspondientes á la nueva posición j' del punto j , y tendremos:

$$P[Mk + d(Mk)] = W + dW,$$

$$\text{ó bien: } P \times Mk + P \times d(Mk) = W + dW,$$

$$\text{pero } P \times Mk = W;$$

por consiguiente:

$$P \times d(Mk) = dW.$$

Designemos por y la longitud $j_0 k$, tendremos:

$$Mk = y + Mj_0 = y + c,$$

$$d(Mk) = dy + c = dy.$$

Reemplazando en la ecuación general $d(Mk)$ por su valor deducido de antes, y resolviendo con relación á P , resulta:

$$P = \frac{dW}{d(Mk)} = \frac{dW}{dy}.$$

Se ve, por consiguiente, que es siempre posible hallar el valor del empuje P construyendo la curva de los momentos W considerada como fun-

ción de las y y trazando en seguida tangentes por los diferentes puntos de esta curva.

La construcción puede simplificarse mucho, trasladando los ejes de coordenadas á Yj_0Z y trazando la curva auxiliar j_0J cuyas ordenadas z satisfacen á la ecuación:

$$z^2 = 2W, \text{ ó bien } z = \sqrt{2W} = \sqrt{2R \times jf};$$

en cuyo caso, el trazado de la curva de que hablamos es muy fácil. — En efecto, basta tomar á la altura de cada junta j , longitudes iguales á

$$KJ = Z = \sqrt{2R \times jf},$$

y unir los puntos que se obtengan por medio de una línea continua; la curva Jj_0 que así se encuentre será precisamente la buscada.

La relación que existe entre esta curva y la magnitud del empuje P , está dada por la expresión siguiente:

$$P = \frac{dW}{dy} = \frac{zdz}{dy},$$

es decir, que el empuje P es la sub-normal de la curva Jj_0 ; por consiguiente, para el caso que nos ocupa es igual á la longitud KN .

De la misma manera se podrá hallar el valor del empuje P para todos los puntos situados sobre la junta de la clave y trazar la curva ts correspondiente, que así trazada, representaría todos los empujes que conducen á curvas de presión tangentes al intrados (fig. 10).

La misma marcha serviría para trazar las curvas de presión tangentes al trasdos de una bóveda considerada, construyendo desde luego, como anteriormente, la curva $t's'$ que representa los empujes.

Este método no es completamente exacto, como por otra parte nos lo ha hecho ya ver el cálculo, y no puede emplearse más que para las partes del contorno en que su empleo no conduce á la aproximación de los límites inferiores de los empujes, y en que tampoco se verifica el alejamiento de los límites superiores. En la práctica pueden usarse con ventaja, en todos los casos, las simplificaciones que hemos indicado, á pesar de la inexactitud inherente á este procedimiento, que no tiene importancia en la parte útil del contorno.

En resumen, para asegurar el equilibrio de una bóveda en las dos condiciones precisadas, es menester construir las seis líneas siguientes:

gh y $g'h'$, que aseguran la estabilidad de la bó-

veda contra el resbalamiento de arriba abajo é inversamente.

pq y $p'q'$, dos hipérbolas, que fijan: la primera, el paso de la curva de presiones por los puntos situados en los arranques y en el intrados, y la segunda, el paso de la misma curva por los puntos situados en los arranques y en el trasdos.

ts y $t's'$, dos curvas, que fijan: la primera, los valores del empuje para los cuales la curva de presiones es tangente al intrados, y la segunda, los valores del empuje para los cuales la curva de presiones es tangente al trasdos.

La superficie $h\alpha\beta tg'q'$, común á todos los contornos contenidos entre los tres pares de líneas de que acabamos de hablar, limita el empuje en la clave para el que se encuentran satisfechas las dos primeras condiciones de equilibrio. Si las superficies circunscritas por las líneas gh y $g'h'$, pq y $p'q'$, st y $s't'$ no tienen zona común, valdrá tanto como asegurar que es imposible el equilibrio en la bóveda considerada.

(c.) *Condición relativa al límite de resistencia de los materiales empleados.* — Hasta ahora hemos considerado las bóvedas como sólidos compuestos de cuerpos indeformables; pero no sucede así realmente, y hay necesidad de cambiar algo los resultados de las dos condiciones de equilibrio que antes hemos obtenido, teniendo en cuenta la resistencia que pueden presentar con seguridad los materiales empleados en la construcción. Hemos visto ya que Durand-Claye, para hacer figurar en su método la resistencia de los materiales, construía un contorno que encerraba las extremidades de los empujes correspondientes á esta condición; pero esta marcha es larga y laboriosa, porque adoptándola, sería menester trazar contornos semejantes tantas veces como juntas hubiera en la bóveda considerada.

Mr. Peaucellier discute el mismo asunto con alguna menos precisión que su antecesor, puesto que sólo se ocupa de las juntas en que la curva de presiones se aproxima más á una de las aristas extremas.

Para la junta situada en la clave, Peaucellier emplea un método que es casi enteramente igual al seguido por Durand-Claye.

En efecto, sean:

ρ el empuje sobre la unidad de superficie, en la arista más comprimida.

H la componente perpendicular de la reacción de la junta.

η la distancia del punto de aplicación de la fuerza H , á la arista ántes citada.

La ecuación siguiente establece la relación entre estas tres cantidades, y es:

$$\rho = \frac{2H}{3\eta},$$

que no se verifica sino cuando la distancia η no excede del tercio de la longitud de la junta considerada.

La cantidad ρ es conocida, puesto que no es otra cosa que el límite de los esfuerzos que los materiales pueden soportar con seguridad y la fuerza es proporcional á la distancia η . Esta consideración nos permite aún trazar el lugar geométrico de las fuerzas H , que en el caso que nos ocupa está representado por dos rectas J_0v y j_0w , que dibujan sobre el contorno obtenido precedentemente una zona $h't'l''h''$ (fig. 11).

El método seguido por Mr. Peaucellier para cualquier otra junta, por ejemplo, para la junta Jj , es el siguiente:

Sea:

OR la resultante de las fuerzas exteriores que obran sobre el sólido J_0j_0Jj ;

MO la dirección del empuje P , que con la fuerza R , da una resultante OF , que pasa por el punto j .

Terminando el paralelogramo, tendremos:

$OF = S$ = reacción de la junta Jj

$RF = P$ = empuje en la clave J_0j_0 .

Si aumentamos ahora RF , en una cantidad infinitamente pequeña FF' , podemos alejar OF del punto j y referir de esta manera el empuje á las proximidades de la arista j , de la junta Jj que se encuentra en el límite de seguridad ρ . A consecuencia de esta consideración, el problema se reduce ahora á la investigación del valor FF' .

Para hallar este valor sean

$$\begin{aligned} j'j'' &= \eta \\ FF' &= \Delta P, \end{aligned}$$

prolonguemos la junta Jj' hasta su encuentro en N , con RF , el triángulo $j'FN$ cortado por la transversal OjF nos da la relación siguiente entre los segmentos:

$$\frac{FF' \times Nj' \times Oj}{FN \times j'j'' \times OF} = 1$$

ó bien

$$\frac{\Delta P \times (Nj + \eta) Oj}{(FN + \Delta P) \eta \times OF} = 1$$

ó sea

$$\Delta P \times (Nj + \eta) \times Oj = (FN + \Delta P) \eta \times OF.$$

Observemos desde luego que las cantidades η y ΔP , que son muy pequeñas con relación á FN y Nj , podremos despreciarlas en los términos $Nj + \eta$ y $FN + \Delta P$ y encontraremos así la ecuación aproximada

$$\Delta P \times Nj \times Oj = FN \times \eta \times OF;$$

ó bien ésta

$$\Delta P = \eta \frac{FN}{Nj} \times \frac{OF}{Oj};$$

pero vemos que en el triángulo FNj la relación $\frac{FN}{Nj}$ es igual á la de los senos de los ángulos j y F ; por consiguiente, la ecuación se convierte en

$$\Delta P = \eta \times \frac{OF \sin j}{Oj \sin F} = \eta \times \frac{H}{h},$$

en la cual H , representa la componente de la reacción perpendicular á la junta Jj y h la distancia Jk del punto j al empuje en la clave J_0j_0 .

Hemos visto por otra parte que

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{H}{\eta}$$

ó bien que

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{H}{\rho}$$

y por tanto

$$\Delta P = \frac{2}{3} \frac{H^2}{\rho h} = FF'$$

Este es, por tanto, el valor del aumento que debe experimentar el empuje en la clave para que el trabajo de las aristas de las juntas en el intrados no exceda del límite de seguridad.

De la misma manera hallaríamos el valor de la disminución que debe experimentar el empuje en la clave para reducir el trabajo de las aristas situadas en el trasdos de las juntas al mismo límite de seguridad.

En resumen, cuando el valor del empuje en la clave se haya determinado con arreglo á las dos primeras condiciones (a) y (b), bastará modificarlo conforme á las exigencias impuestas por la tercera, es decir, para que el trabajo no sea en ninguna parte superior á la resistencia de los materiales.

Una vez efectuadas todas las operaciones ántes prescritas, obtendremos un cierto contorno que envuelve todos los empujes posibles en la clave, cuando satisfacen las tres condiciones de equilibrio, es decir, las que aseguran la estabilidad de la bóveda.

No queda más sino trazar las curvas de presión correspondientes á cada uno de los vértices del contorno así encontrado, y determinar para cada una de ellas el punto más débil. Esta operación se efectúa como se ha indicado ya al hablar del método de Durand Claye.

Tales son las observaciones que hemos creído oportunas con respecto á los métodos ya presentados para resolver el problema de la estabilidad de bóvedas.

II.—EXPOSICION DE ALGUNOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA GRÁFICA.

Antes de abordar el objeto principal de nuestro trabajo, que es dar á conocer el nuevo método de Szystowski, creemos útil exponer algunos teoremas de la estática gráfica en los cuales se apoya su teoría sobre la curva de presiones en las bóvedas de fábrica.

Esta exposición es tanto más necesaria, cuanto que la *estática gráfica* es poco conocida hasta ahora.

Los principios de que se trata pueden resumirse como sigue:

1.^a *Definición.* Una línea recta cualquiera queda enteramente definida con los datos siguientes: su longitud, su posición, su dirección ó sentido, y su punto de aplicación.

Estas propiedades de las líneas rectas corresponden exactamente á las de una fuerza cualquiera; por consiguiente, cada fuerza puede estar ahora representada exactamente en lo que concierne á su magnitud, posición, dirección y punto de aplicación, por una línea recta que tenga las mismas propiedades.

Esta observación constituye el punto de partida de la *estática gráfica*.

2.^a *Definición.* Se llama *polígono de las fuerzas* una sucesión continua de rectas que tengan la misma magnitud y el mismo sentido que las fuerzas que les corresponden.

Así el polígono *Oabcde* (fig. 12), que llena las condiciones enunciadas, es un polígono de las fuerzas 1, 2, 3, 4, 5, puesto que *Oa* tiene la misma magnitud y el mismo sentido que la fuerza 1; *ab* que la 2, *bc* que la 3; *cd* que la 4, y *de* que la 5.

3.^a *Definición.* Se llama *polígono funicular* de un sistema de fuerzas, á la sucesión continua de rectas que tengan el mismo sentido y la misma posición que las resultantes parciales de todas estas fuer-

zas. Así el polígono *ABCDEF* (fig. 12^b), que satisface á las condiciones enunciadas, es un polígono funicular de las fuerzas 1, 2, 3, 4 y 5 porque se ve (fig. 12^b) que *AB* tiene el mismo sentido y la misma posición que la resultante (1); *BC* que 1 + 2; *CD* que 1 + 2 + 3; *DE* que 1 + 2 + 3 + 4, y *EF* que 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

Por consiguiente, para construir el polígono funicular de un sistema de fuerzas, se procede como sigue:

Se traza primeramente el polígono de las fuerzas *Oabcde* para las fuerzas 1, 2, 3, 4 y 5; después se une el punto *O*, llamado *polo* del polígono buscado, con los vértices *b*, *c*, *d*, *e* y por el punto *B* (fig. 12^b) de intersección de la fuerza 1 con la fuerza 2, se traza una paralela *BC* al radio *Ob*, es decir, á la resultante de las fuerzas (1 + 2); por el punto *C* se traza *CD* paralela á *Oc*, es decir, á la resultante (1 + 2 + 3) y así sucesivamente.

El polígono *ABCDEF* que se forma de este modo, es precisamente el polígono funicular de las fuerzas 1, 2, 3, 4 y 5.

Si en lugar de tomar el punto *O*, de aplicación de la primer fuerza, se eligiese como polo un punto cualquiera del sistema de fuerzas dado, se obtiene un *polígono polar* del cual no es más que un caso especial el polígono funicular.

Teorema 1.º En el polígono funicular de un sistema de fuerzas, la resultante de un cierto número de fuerzas consecutivas pasa siempre por el punto de intersección de los lados extremos y correspondientes á estas fuerzas (fig. 12^a y 12^b).

Para hacer más fácil la demostración de este teorema, vamos á establecerlo primeramente para un sistema de dos fuerzas; por ejemplo, para las 3 y 4, y después lo haremos extensivo á otro sistema tal como el de las fuerzas 2, 3 y 4.

Primer caso. Cuando el sistema que se considera se compone de dos fuerzas 3 y 4, decimos que la resultante $3 + 4 = bc$ pasa por el punto *B* de intersección de las rectas *BC* y *DE*, que no son otra cosa que los lados extremos del polígono funicular de las fuerzas 3 y 4.

En efecto, tracemos por el punto *O*, polo del polígono *ABCDEF*, los radios *Ob*, *Oc* y *Od*, y unamos los puntos *b* y *d* por una línea recta *bd*. En el cuadrilátero *Obcd* así formado, cada una de las seis rectas *bc*, *cd*, *Ob*, *Oc*, *bd* y *Od* representa en magnitud y en dirección una de las fuerzas que componen el sistema dado; es decir, que la recta *bc* representa en magnitud y en dirección la fuer-

za (3); cd la (4); ob la (1 + 2); bd la (3 + 4); oc la (1 + 2 + 3), y od la (1 + 2 + 3 + 4).

Si ahora, sobre la figura que representa el polígono funicular, completamos el cuadrilátero $CQDR$ prolongando las fuerzas (3) y (4) y los lados DC y DE hasta su intersección en Q y R , y trazamos la diagonal QR se ve que en este cuadrilátero cada una de las cinco rectas CQ , DQ , CR , CD y DR representa en dirección y en posición una de las fuerzas del sistema.

En efecto, CQ representa la dirección y la posición de la fuerza (3); DQ la (4); CR la 1 + 2; CD la 1 + 2 + 3; DR la (1 + 2 + 3 + 4).

Comparando entre sí los cuadriláteros $Obcd$ y $CQDR$, se ve que las cinco rectas del primero son paralelas a las cinco rectas del segundo, es decir que el lado bc es paralelo al lado CQ ; cd a QD ; ob a CR ; Od a DR .

La diagonal Oc es paralela a la diagonal CD ; por consiguiente, las seis rectas de estos cuadriláteros serán paralelas entre sí, es decir, que la diagonal bd será paralela a la diagonal QR , resultado que se puede enunciar diciendo que la dirección de la recta $bd = 3 + 4$ es la de la recta QR (*). Vemos además que la resultante (3 + 4) pasa necesariamente por el punto Q de intersección de estas componentes 3 y 4, y como la recta QR pasa también por este punto Q y es al mismo tiempo paralela a la resultante (3 + 4), la recta QR representa, pues, en posición la resultante (3 + 4).

Segundo caso. La resultante $2 + 3 + 4$ pasa por el punto R de intersección de los dos lados extremos AB y DE del polígono funicular formado por las fuerzas 2, 3 y 4 (figs. 12^a y 12^b).

Para demostrar esta proposición, no hay sino observar que las fuerzas 3 y 4 pueden reemplazarse siempre por su resultante (3 + 4), y en virtud de esta consideración, el segundo caso se reduce fácilmente al primero que se ha demostrado.

En efecto, procediendo siempre como lo hemos hecho en el primer caso, se obtienen dos cuadriláteros $Oabd$ y BR_1RQ_1 que tienen las mismas propiedades que el cuadrilátero de que nos hemos ocupado en el primer caso, es decir, que cinco rectas del primero son paralelas a las cinco rectas

del segundo; así, el lado ab es paralelo al lado BQ_1 ; bd es paralelo a Q_1R ; Oa es paralelo a BR_1 ; el lado Od es paralelo al lado RR_1 ; la diagonal Ob es paralela a la diagonal BR ; por consiguiente, las seis rectas, en virtud de las mismas consideraciones anteriores, deben ser paralelas entre sí; es decir, que la diagonal ad debe ser paralela a la diagonal Q_1R_1 y como la diagonal Q_1R_1 pasa por el punto Q_1 y es además paralela a la resultante $2 + 3 + 4$, se deduce que representará en posición la resultante.

Teorema 2.º Los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos polígonos polares de un sistema de fuerzas, se hallan sobre una línea recta y paralela a la que une los dos polos de ambos polígonos. Sean 1, 2, 3, 4, 5, las fuerzas del sistema dado; $Oabcde$ el polígono de las fuerzas; $ABCDEF$, el polígono polar con relación al polo O ; $A'B'C'D'E'F'$, el polígono polar con relación al polo O' ; OO' , la recta que pasa por las dos posiciones consecutivas del polo.

Considerando la figura así formada, se puede enunciar el teorema de la manera siguiente:

La recta MN que une los puntos de intersección M y N de las rectas BC , $B'C'$ y DE , $D'E'$, es paralela a la línea OO' . Para demostrarlo, completamos los dos cuadriláteros $MGBB_1$ y $OabO'$, y se ve en seguida que cinco rectas del primero son paralelas a las cinco rectas del segundo; es decir, que el lado Oa es paralelo al lado GB ; bO' , a B_1M ; ab , a BB_1 ; la diagonal aO' es paralela a la diagonal B_1G , y bO es paralela a BM .

Por consiguiente, las seis rectas de cada uno de los cuadriláteros serán también paralelas entre sí, y se tendrá el lado OO' paralelo al lado MG .

Procediendo de la misma manera para los otros lados de los polígonos funiculares, se hallará fácilmente que la línea MN es paralela a la línea OO' , es decir, que los puntos de intersección de los lados correspondientes están situados sobre una recta paralela a la que une las dos posiciones sucesivas del polo.

Teorema 3.º Cualquiera que sea el camino recorrido por el polo del polígono polar de un sistema de fuerzas, el punto de intersección de los lados extremos de dicho polígono describirá siempre una recta paralela a la que une el punto final del polígono de las fuerzas con el punto inicial de la segunda fuerza de este polígono.

Sean 1, 2, 3, 4, 5 las fuerzas del sistema dado; $Oabcde$ el polígono de las fuerzas; $ABCDEF$ el

(*) Esta propiedad puede demostrarse, por consideraciones de geometría elemental, con independencia de toda noción acerca de las figuras reciprocas, presentando la cuestión bajo la forma siguiente: Si las cinco rectas de un cuadrilátero cualquiera son paralelas a las cinco rectas de otro cuadrilátero, la sexta recta del primero será paralela a la sexta recta del segundo.

polígono polar con reaccion al polo O ; $A'B'C'D'E'F'$ el polígono polar con relacion al polo O' ; ae la recta que une el punto final e del polígono de las fuerzas con el punto inicial a de la segunda fuerza de dicho polígono. Considerando la figura así formada, se puede enunciar el teorema de la manera siguiente:

La recta RS que une los puntos de interseccion de los lados extremos AB , EF y $A'B'$, $E'F'$ de los polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ es paralela á la recta ae .

Para demostrarlo, consideremos los dos cuadriláteros $GRHS$ y $O'eOa$, en los que cinco rectas del primero son paralelas á las cinco rectas del segundo; es decir, que GR es paralela á Oa ; GS á $O'a$; HR á Oe y HS á $O'e$, y la diagonal GH es paralela á la diagonal OO' . Por consiguiente, los sextos lados deben ser paralelos entre sí, y la diagonal RS será paralela á la diagonal ae .

Observacion. Hasta ahora nos hemos ocupado de los sistemas de fuerzas en los cuales todas ellas permanecen independientes unas de otras, tanto bajo el punto de vista de su magnitud, como bajo el punto de vista de su posicion y direccion. Si se admite ahora que las fuerzas que componen los sistemas considerados estén unidas entre sí por ciertas condiciones, como, por ejemplo, que todas ellas sean paralelas entre sí, su polígono se reduce á una recta paralela á las fuerzas consideradas. Si ademas se supone que las fuerzas del sistema considerado ántes, estén distribuidas de una manera continua con relacion al plano normal á su direccion, los polígonos polares se convierten en curvas continuas tangentes á los lados de los polígonos correspondientes ya obtenidos en la primera hipótesis.

III.—EXPOSICION DE LA TEORÍA.

Consideraciones generales. Se llama *curva de presiones* al lugar geométrico de los centros de las presiones desarrolladas en una bóveda. Esta definicion es completa, porque expresa de una manera precisa la formacion de la curva en cada bóveda y la ley que debe representar.

En efecto, si en una bóveda cualquiera $ABCD$ (fig.^a 14) llamamos P al empuje en la clave Z_1 ; Z_2 á los pesos de las dovelas sucesivas; y C_1 , C_2 , C_3 á los centros de gravedad de las dovelas correspondientes, será fácil siempre trazar la curva de presiones, tirando verticales por los centros de gravedad y componiendo el peso de cada dovela

con el empuje en la clave y con los pesos de las que precedan á la que se considera.

Hipótesis que sirven de base á la nueva teoría de la curva de presiones en las bóvedas.

Lo que antecede pone de manifiesto claramente que la curva de presiones no es otra cosa que un polígono polar de los pesos de las dovelas, cuyo polo está alejado del polígono de las fuerzas una cantidad proporcional al empuje tomado en la misma escala.

La construccion de la curva de presiones no presentaria dificultad si se conociese exactamente el valor absoluto del empuje, su punto de aplicacion y su direccion; ó en otros términos, su magnitud, su posicion y el ángulo que forma con el plano de junta en la clave. Como en el presente trabajo nos proponemos estudiar solamente las bóvedas simétricas, la última de las anteriores condiciones es perfectamente conocida, puesto que el empuje ha de ser siempre horizontal.

Segun lo que precede, la solucion completa del problema no depende más que de dos elementos: 1.º, del valor de empuje en la clave; 2.º, de su punto de aplicacion. La curva de presiones que se busca es, por tanto, funcion de estos dos elementos ligados íntimamente por las condiciones de equilibrio, que son las siguientes, segun ha demostrado Mr. Méry:

- 1.º La curva de presiones debe estar contenida siempre entre el trasdos y el intrados de la bóveda.
- 2.º Debe encontrar siempre á la normal á cada junta bajo un ángulo menor que el de rozamiento.
- 3.º La reparticion de las presiones sobre la superficie total de las juntas debe ser tal que el trabajo máximo desarrollado en un punto cualquiera de esta superficie, no exceda nunca al limite de resistencia de los materiales.

Para determinar las incógnitas indicadas anteriormente, sería indispensable considerar las condiciones de equilibrio que acabamos de recordar. Este procedimiento ha sido adoptado por Durand-Claye y Peaucellier, que siguieron en esto el ejemplo de Méry. Sin embargo, las operaciones que hay necesidad de efectuar en estas condiciones, presentan bajo el punto de vista práctico ciertos inconvenientes. Para evitarlos se puede recurrir á algunas hipótesis basadas en la experiencia, cuya idea fué anterior á Durand-Claye y sus sucesores. Veamos cuáles son las que, satisfaciendo

á las exigencias ántes señaladas, presentan mayor verosimilitud.

Hemos visto que para poder trazar la curva de presiones en una bóveda cualquiera, es menester conocer exactamente el valor del empuje en la clave y su punto de aplicacion. Para determinar estas dos incógnitas, es necesario y suficiente adoptar solamente dos hipótesis; mayor número de ellas, conduciría ó á un resultado absurdo, ó á poner en claro que no eran todas completamente independientes unas de otras. Precisamente en el número de hipótesis es en lo que consiste, á nuestro juicio, el error cometido por Navier y Méry, que ambos han considerado el problema de la estabilidad de bóvedas bajo el mismo punto de vista.

MM. Navier y Méry han adoptado tres hipótesis para el trazado de la curva de presiones; en efecto, han elegido *à priori* dos puntos, el uno en la clave y el otro sobre la junta de rotura, por los cuales debe pasar aquella curva, y además, fundándose en las experiencias de Boistad, fijaron la posición de la junta de rotura. Este procedimiento lleva consigo un error grave que conduce á resultados inadmisibles. Consideremos, en efecto, una bóveda rebajada á ménos de $\frac{1}{6}$; para las cuales pretende Boistard que la junta de rotura coincide siempre con la junta de arranque.

Admitiendo esta asercion, construyamos para dicha bóveda la curva de presiones, siguiendo, sea el método de Navier ó el de Méry, y veamos cuál será el resultado. Una vez trazada dicha curva, se ve que es, ó demasiado aplastada ó demasiado bombeada, ó bien que corta en dos puntos al trasdos de la bóveda, cuyos resultados provienen única y exclusivamente de la tercera hipótesis adoptada, concerniente á la junta de rotura cuya posición está designada de antemano con arreglo á las experiencias de Boistard, que dicho sea de paso, no son de una exactitud matemática.

Dos hipótesis son suficientes, conforme hemos dicho, para poder trazar la curva de presiones en una bóveda cualquiera, y sólo hace falta determinar su naturaleza. En nuestro sentir, las dos primeras hipótesis de Navier son las únicas necesarias y suficientes, porque responden completamente á las condiciones de equilibrio y admiten la posibilidad del derrumbamiento de una bóveda.

Las hipótesis de Méry hacen imposible esta caída alrededor de la arista de la junta de rotura, á consecuencia de la condicion impuesta á la curva de presiones de pasar por el punto medio de esta junta.

Las dos primeras hipótesis de Navier pueden resumirse de la manera siguiente:

En una bóveda cualquiera la curva de presiones debe pasar por un punto situado en la clave á una distancia igual á $\frac{1}{3}$ de la altura de la junta, á partir del trasdos y por la junta de rotura á una distancia igual á $\frac{1}{3}$ de su longitud á partir del intrados, que determinan perfectamente la posición de la curva de presiones en una bóveda cualquiera; pero que, sin embargo, para hacer resaltar más toda su importancia, las enunciaremos de la manera siguiente:

La curva de presiones contenida invariablemente en el interior de la bóveda entre el trasdos y el intrados, debe pasar por dos puntos particulares, de los cuales el uno está situado en la clave á los dos tercios de la junta, á partir del trasdos, y el otro al tercio de la junta de rotura, á partir del intrados. Siendo estos dos puntos los más aproximados á los límites de la bóveda, constituyen sus puntos más débiles, y como aquí nos ocupamos exclusivamente de las bóvedas simétricas, es evidente que la posición del primero de estos dos puntos está perfectamente determinada, porque debe hallarse en un plano vertical que pase por el eje de la bóveda. No queda, por lo tanto, para que la cuestión esté completamente resuelta, más que hallar la posición de la segunda junta. Este segundo punto debe hallarse sobre la junta de rotura; luego el plano de junta de rotura se determinará muy fácilmente considerando que debe coincidir con el en que la curva de presiones esté más aproximada al intrados de la bóveda, es decir, con el en que la curva de presiones pasa á una distancia del intrados igual al tercio de la longitud de la junta.

(Se continuará.)

FERRO-CARRILES DEL NOROESTE.

Con el presente número repartimos la lámina 63 que representa en conjunto las diversas líneas de la Compañía de los ferro-carriles del Noroeste, y de las que con ellas se relacionan. Este plano general da idea de los caminos de hierro que en Galicia y Astúrias se encuentran en construcción ó en explotación, y para tener la red completa de las líneas que han de establecerse en esta comarca, habría que agregar las que se encuentran en proyecto y que formarán parte del plan de ferro-carriles de servicio general. Entre los que se hallan