que comunica al sistema de engranajes el movimiento del motor. La otra gran polea, establecida en el extremo superior de la línea, lleva una abrazadera de hierro enlazada con el cubo de la rueda, á la que está unida una maroma que va á parar á un torno, el cual al obrar hace que el eje de aquélla avance ó retroceda entre dos guías formadas por gruesas piezas de madera, consiguiéndose así dar al cable la conveniente tension. Éste tiene $0^m,02$ de diámetro, y está construido con alambre de acero y alma de cáñamo.

El muelle para la carga, establecido en la parte alta de la línea destinada á la explotacion de la mina *Amistosa*, consiste en un piso fuerte de madera de 5 metros de ancho, colocado un metro más bajo que el camino ó vía por donde circulan los wagones que conducen el mineral, y algo por encima de la boca ó parte superior de los cubos, los cuales se cargan así con facilidad; y el de descarga, construido en la parte inferior, está á $3^m,5$ de altura sobre el terreno natural, debajo del cual se halla situada la locomóvil.

El ancho total de la vía, ó sea la distancia entre los cables extremos, mide en la línea de la mina *Amistosa* $6^m,53$, y en la de *Begoña* $7^m,87$; y la velocidad máxima de la carga en aquélla es de 2 metros por segundo, marcha que permite hacer los trasportes con la mayor regularidad, y que llegan en la seccion que está en explotacion á 400 toneladas, término medio, al dia.

NUEVO MÉTODO DE CALCULO DE DESMONTES Y TERRAPLENES.

MOVIMIENTOS DE TIERRAS.

Investigacion de un nuevo método de cubicacion.

Lámina 26.

1. Para el cálculo del volúmen de los desmontes y terraplenes se conocen tres métodos distintos: el llamado exacto, el del área media entre las extremas, y el del área de cota media entre las cotas extremas. El primero da un resultado tan aproximado al verdadero como se desee; pero su aplicacion exige un tiempo muy largo, está expuesta á muchas equivocaciones, y no se presta á la formacion de tablas que den inmediatamente los resultados, por cuyas razones casi nunca se emplea. El segundo es de una aplicacion muy expedita, y da un resultado muy superior al verdadero. Siendo preferible que la apreciacion del volúmen, sobre no ser exacta, sea mayor que la verdadera, no se ha dudado en dar la preferencia al método del área media, que es, por tanto, el generalmente empleado en el estudio de los proyectos, sin dar toda la importancia que tiene al error que se comete, y que varía entre 0 y 50 por 100 del verdadero.

El presente escrito tiene por objeto hacer un exámen comparativo entre los resultados que aquéllos ofrecen, en el caso particular de que el perfil del terreno sea una recta horizontal, é investigar un nuevo método general, que, á la par que sencillo, ofrezca una aproximacion por exceso incomparablemente mayor, y se preste á la formacion de tablas, único medio de simplificar la cubicacion y evitar las equivocaciones inherentes á las operaciones aritméticas. Para la necesaria claridad lo dividirémos en tres partes: primera, comparacion entre los resultados que dan los tres métodos conocidos; segunda, exposicion del nuevo método y su comparacion con el exacto y el del área media; tercera, formacion de las tablas para la aplicacion del nuevo método.

1.° COMPARACION ENTRE LOS VOLÚMENES QUE DAN LOS MÉTODOS CONOCIDOS.

2. Consideremos el volúmen de desmonte comprendido entre los perfiles trasversales consecutivos $abef$, proyectado horizontalmente en $a'f'$, y $ghkq$ proyectado en $g'q'$ (fig. 1.ª), y propongámonos calcularlo en el supuesto de que las líneas af y gq del terreno sean rectas horizontales. Llamemos B el ancho de la explanacion, d y d' las cotas rojas del eje, m la media entre ellas, r el talud del del desmonte, c, c', c'' y c''' las cotas de los puntos proyectados en b', e', h' y k', l la distancia entre los perfiles, B_1 el área del triángulo $a'b'h'$, igual al B_3 ó $e'f'k'$, y B_2 la del $a'g'h'$, igual al B_4 ó $f'k'q'$; S el área del primer perfil, R la del segundo, y M la de cota media, V el volúmen verdadero del entreperfil, V' el que da el método del área media, y V'' el que da el del área de cota media; v el volúmen proyectado en el rectángulo $b'h'k'e'$, y v' el proyectado en el trapecio $e'k'q'f'$, y se tiene:

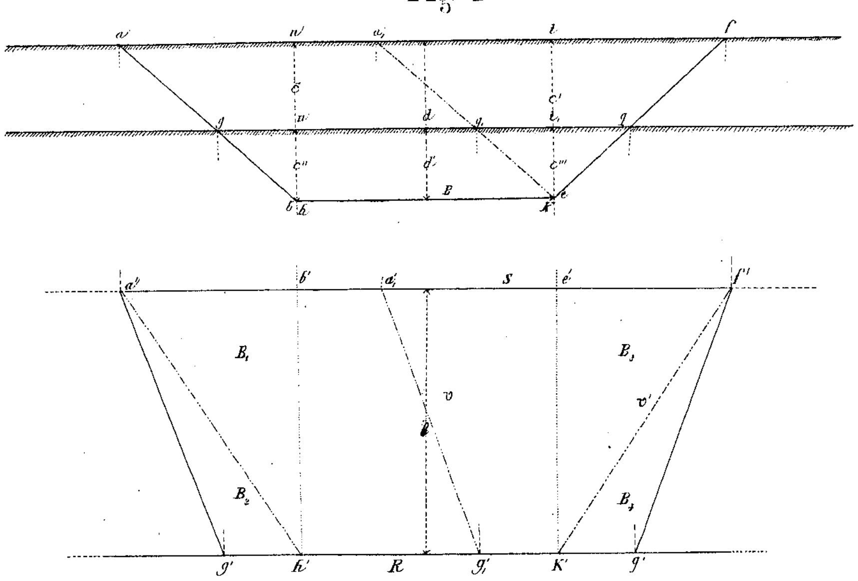
$$V = v + 2v';$$

pero, segun las fórmulas conocidas del método exacto,

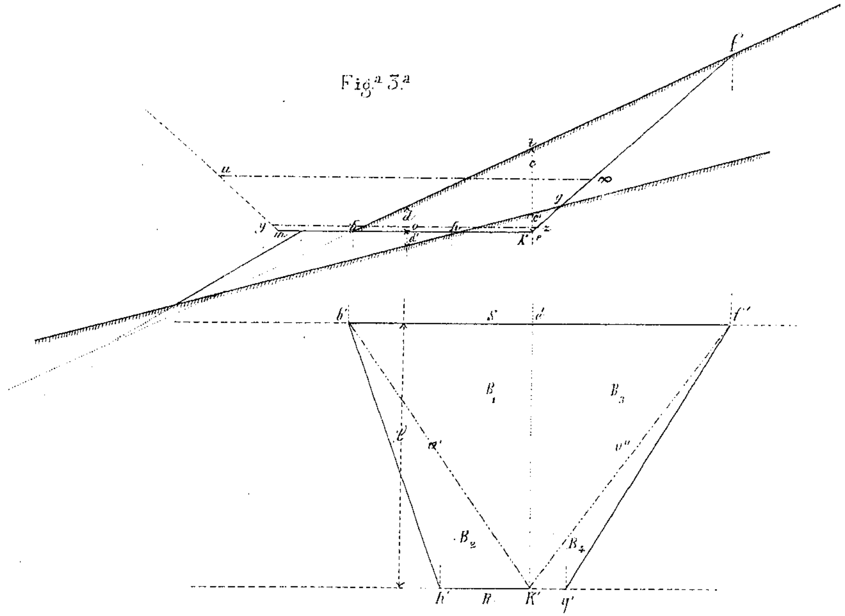
$$v = l.\frac{c + c' + c'' + c'''}{4}$$

NUEVO METODO DE CALCULO DE DESMONTES Y TERRAPLENES.

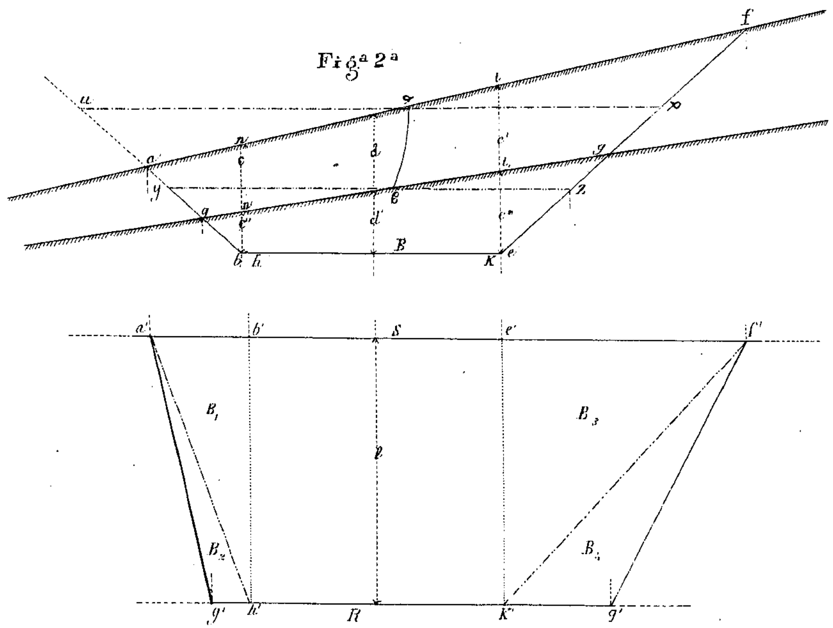
Figª 1ª



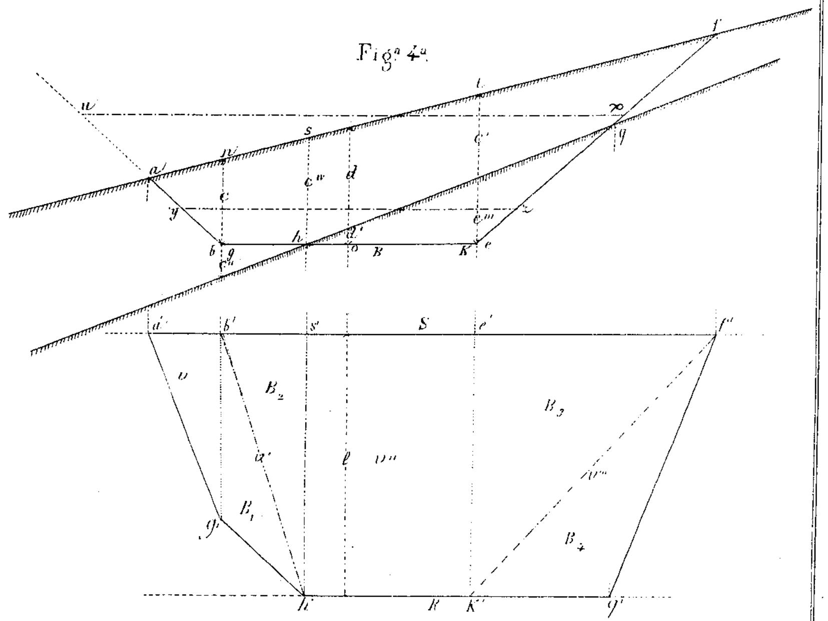
Figª 3ª



Figª 2ª



Figª 4ª



Lit. Donon.

y

$$v' = \frac{1}{6}\left[B_1(2c + c'') + B_2(2c'' + c)\right];$$

luego, sustituyendo y observando que

$$B_1 = \frac{1}{2}\, ldr,$$

y

$$B_2 = \frac{1}{2}\, ld'r,$$

resulta:

(a) $$V = \left[\frac{1}{3}\, r\,(d^2 + d'^2 + dd') + \frac{d + d'}{2}\,.\,B\right] l \ldots\ldots (1),$$

que es el volúmen exacto del prismoide *abefgkhg*.

El área S tiene por expresion

$$S = nbet + 2abn = Bd + rd^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

y del mismo modo la R

$$R = Bd' + rd'^2;$$

y, por consiguiente, resulta:

$$V' = \frac{S + R}{2}\,.\,l = \left[\frac{1}{2}\, r\,(d^2 + d'^2) + \frac{d + d'}{2}\,.\,B\right] l \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

que es el volúmen del prismoide, segun el método del área media.

Segun la hipótesis de arriba,

$$m = \frac{d + d'}{2},$$

y segun la fórmula (2)

$$M = rm^2 + Bm;$$

por consiguiente,

$$V'' = Ml = \left[\frac{1}{4}\, r\,(d + d')^2 + \frac{d + d'}{2}\, B\right] l \ldots\ldots\ldots (4),$$

que es el volúmen calculado por el método del área de cota media.

3. Restando la ecuacion (1) de la (3), y la (4) de la (1), resulta:

$$V' - V = \frac{1}{6}\, r\,(d - d')^2 l \ldots\ldots\ldots (5),$$

$$V - V'' = \frac{1}{12}\, r\,(d - d')^2 l \ldots\ldots\ldots (6).$$

Los primeros miembros de estas ecuaciones representan los errores cometidos empleando el método del área media y el del área de cota media; y siendo los segundos esencialmente positivos, demuestran: 1.°, que el *error cometido por el método del área media es siempre por exceso, y está expresado por el sexto del producto del talud por el cuadrado de la diferencia de las cotas y por la longitud del entreperfil;* 2.°, que *el cometido por el del área de cota media es siempre por defecto, é igual á la mitad del anterior;* 3.°, que *estos errores son iguales sólo cuando son nulos, y lo son cuando sea cero el talud ó iguales las cotas rojas*, ó lo que es lo mismo, *cuando el prismoide se convierte en un prisma.*

A pesar de ser doble el error cometido por el método del área media, es preferible su empleo, porque es ventajoso que de cometerse error sea por exceso y no por defecto.

Dividiendo la ecuacion (5) por la (1) se tiene el error cometido por metro cúbico del volúmen exacto, y calculándole para el caso más desfavorable, que es cuando $d' = o$, y llamándole e será:

$$e = \frac{rd}{2rd + 3B}.$$

Este valor, que crece con r y d, toma para $r = 1{,}5$ y $d = 15^m$ el de

$$e = o^{m3},2679.$$

2.° EXPOSICION DEL NUEVO MÉTODO Y SU COMPARACION CON EL EXACTO Y DEL ÁREA MEDIA.

4. Cuando se aplica á la cubicacion el método del área media, se supone que el entreperfil es un

---

(a) Esta fórmula puede obtenerse de otro modo no ménos sencillo. En efecto; si por la arista $e'k'$ se tira el plano a_1e del talud, el volúmen del prismoide queda dividido en el prisma oblícuo $abea_1g_1ghk$, equivalente al recto $nbett_1n_1hk$, y en el tronco de tetraedro a_1efqg_1k: el volúmen del primero, cuya base es un trapecio de bases paralelas, nb y $n'h'$, y su altura $h'b'$, tiene por expresion

$$\frac{d + d'}{2}\, l \times B;$$

y el del segundo, de altura l y bases

$$a_1ef = tf \times te = dr \times d = d^2r,$$

y

$$g_1kq = d'^2r$$

es

$$\frac{1}{3}\, l\left(d^2r + d'^2r + \sqrt{d^2r \times d'^2r}\right) = \frac{1}{3}\, r\,(d^2 + d'^2 + dd')\, l;$$

y, por consiguiente, el volúmen exacto del prismoide será, como arriba,

$$V = \left[\frac{1}{3}\, r\,(d^2 + d'^2 + dd') + \frac{d + d'}{2}\,.\,B\right] l.$$

La expresion

$$\frac{d + d'}{2} = m$$

da

$$dd' = \frac{1}{2}\,(4m^2 - d^2 - d'^2);$$

y sustituyendo en la fórmula anterior se convierte en

$$V = \left[r\,\frac{d^2 + d'^2 + 4m^2}{6} + Bm\right] l,$$

que expresa el volúmen en funcion de las cotas rojas extremas y media.

Si se observa que

$$6m = 4m + 2m = 4\,m + d + d',$$

y sustituye este valor en el último valor de V, teniendo presente que

$$Bd + rd^2 = S$$
$$Bd' + rd'^2 = R,$$
$$Bm + rm^2 = M.$$

resulta:

$$V = \frac{S + R + 4M}{6}\, l,$$

que expresa que el volúmen del prismoide en funcion de las áreas extremas y de cota media es igual *al producto de la longitud por el sexto de la suma de las áreas extremas y del cuádruplo de la de cota media.*

prisma; y como este es un caso particular del prismoide, en que las bases son iguales, resulta que si se equipara el entreperfil á un prismoide se separa ménos de la verdad que equiparándole á un prisma.

Consideremos el volúmen comprendido entre los dos perfiles S y R, terminados por las rectas inclinadas *af* y *gq* (figura 2.ª). La hipótesis en que se funda el método exacto consiste en suponer que la superficie del terreno es un paraboloide hiperbólico, que tiene por directrices del primer sistema las rectas $(af, a'f')$, y $(gq, g'q')$, y por plano director el vertical del eje; ó por directrices del segundo sistema las rectas $(nn_1, b'h')$, y $(tt_1, e'k')$, y por plano director el vertical perpendicular á la proyeccion horizontal del eje: el volúmen de este entreperfil, que está terminado por cinco caras planas, y la superficie alaveada, lo podriamos llamar prismoide parabolóidico.

Si en las dos secciones se trazan dos rectas horizontales, *ux* é *yz*, tales, que los trapecios *ubex* ó *yhkz* sean equivalentes á los cuadriláteros *abef* y *ghkq*, y suponemos que reemplacen á las directrices *af* y *gq* del paraboloide, el prismoide parabolóidico se habrá convertido en el prismoide plano de bases equivalentes, *ubexzyhk*. El método que propongo consiste en efectuar el cubo del prismoide parabolóidico como si fuera un prismoide plano de bases equivalentes. Al examinar la aproximacion que ofrece relativamente á los métodos exacto y del área media, considerarémos primero el caso en que los dos perfiles estén en desmonte; despues cuando ambos estén parte en desmonte y parte en terraplen; y, finalmente, cuando el uno esté en desmonte y el otro parte en desmonte y parte en terraplen.

1.er *caso. Entreperfil terminado por dos secciones en desmonte.*

5. Si las rectas *af* y *gq* tuviesen la misma pendiente, el prismoide auxiliar sería equivalente al parabolóidico, y, por consiguiente, el método propuesto dará el mismo resultado que el exacto. En efecto: el paraboloide hiperbólico se convierte en un plano, la interseccion $\alpha\delta$ del plano *uz* con la superficie alaveada, que, en general, será una hipérbola, se reduce á una recta, caso particular de ella; los triángulos equivalentes $ua\alpha$ y αxf son semejantes á los $yg\delta$ y δzq, y, por consiguiente, los poliedros $ua\alpha\delta yg$ y $\alpha xfg\delta z$ son dos troncos de tetraedro equivalentes. Para examinar lo que sucede en los demas casos, en general, deduzcamos las fórmulas del volúmen por cada uno de los tres métodos.

Al efecto, conservando las denominaciones (2), llamemos p la pendiente de *af*, p' la de *gq*, x la cota roja de la horizontal *ux*, de área equivalente, é y la correspondiente á la horizontal *yz*. Los planos verticales de las aristas $b'h'$ y $e'k'$ dividen el volúmen del entreperfil en tres parciales, proyectados horizontalmente en el rectángulo $b'h'k'e'$ y en los trapecios $a'g'h'b'$ y $e'k'q'f'$, que dividen las diagonales $a'h'$ y $f'k'$ en los triángulos B_1, B_2, B_3 y B_4, y para la unidad de distancia entre los perfiles se tiene:

$$c = d - \frac{1}{2}Bp;$$

$$c' = d + \frac{1}{2}Bp;$$

$$c'' = d' - \frac{1}{2}Bp',$$

$$c''' = d' + \frac{1}{2}Bp';$$

$$a'b' = \frac{cr}{1+pr} = \frac{(d - \frac{1}{2}Bp)r}{1+pr},$$

$$e'f' = \frac{c'r}{1-pr} = \frac{(d + \frac{1}{2}Bp)r}{1-pr},$$

$$g'h' = \frac{c''r}{1+p'r} = \frac{(d' - \frac{1}{2}Bp')r}{1+p'r},$$

$$k'q' = \frac{c'''r}{1-p'r} = \frac{(d' + \frac{1}{2}Bp')r}{1-p'r};$$

$$B_1 = \frac{(d - \frac{1}{2}Bp)r}{2(1+pr)},$$

$$B_2 = \frac{(d' - \frac{1}{2}Bp')r}{2(1+p'r)},$$

$$B_3 = \frac{(d + \frac{1}{2}Bp)r}{2(1-pr)},$$

$$B_4 = \frac{(d' + \frac{1}{2}Bp')r}{2(1-p'r)};$$

y

$$V = v + v' + v''.$$

Aplicando á la determinacion de v, v' y v'' las fórmulas conocidas del método exacto, que son:

$$v = \frac{c + c' + c'' + c'''}{4} \cdot \mathrm{B} \ldots\ldots\ldots\ (7),$$

$$v' = \frac{1}{6}\left[\mathrm{B}_1(2c + c'') + \mathrm{B}_2(2c'' + c)\right] \ldots\ldots\ (8),$$

$$v'' = \frac{1}{6}\left[\mathrm{B}_3(2c' + c''') + \mathrm{B}_4(2c'' + c')\right] \ldots\ldots\ (9);$$

y poniendo por cada letra el valor de arriba, y efectuando las operaciones indicadas, será:

$$v = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}(d + d'),$$

$$v' = \frac{1}{48}\left[\frac{8d^2r - 8\mathrm{B}dpr + 2\mathrm{B}^2p^2r + 4dd'r - 2\mathrm{B}d'pr - 2\mathrm{B}dp'r + \mathrm{B}^2pp'r}{1 + pr} + \frac{8d'^2r - 8\mathrm{B}d'p'r + 2\mathrm{B}^2p'^2r + 4dd'r - 2\mathrm{B}dp'r - 2\mathrm{B}d'pr + \mathrm{B}^2pp'r}{1 + p'r}\right],$$

$$v'' = \frac{1}{48}\left[\frac{8d^2r + 8\mathrm{B}dpr + 2\mathrm{B}^2p^2r + 4dd'r + 2\mathrm{B}d'pr + 2\mathrm{B}dp'r + \mathrm{B}^2pp'r}{1 - pr} + \frac{8d'^2r + 8\mathrm{B}d'p'r + 2\mathrm{B}^2p'^2r + 4dd'r + 2\mathrm{B}dp'r + 2\mathrm{B}d'pr + \mathrm{B}^2pp'r}{1 - p'r}\right].$$

Sustituyendo estos valores en el de V, efectuando las operaciones indicadas y simplificando, resulta:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{12}\,\frac{(1-p^2r^2)[\mathrm{B}^2p'r(p'+\frac{1}{2}p)+\mathrm{B}(d+5d')-\mathrm{B}d'p'r^2(p'-p)+2d'r(2d'+d)]+(1-p'^2r^2)[\mathrm{B}^2pr(p+\frac{1}{2}p')+\mathrm{B}(d'+5d)-\mathrm{B}dpr^2(p-p')+2dr(2d+d')]}{(1-p^2r^2)(1-p'^2r^2)} \ldots\ (\mathrm{m}),$$

que es la expresion del volúmen verdadero en funcion de las variables B, d, d', p, p' y r.

El prismoide auxiliar de cotas x é y, cuyo volúmen llamarémos V_1, tiene por expresion (fórmula 1),

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{3}r(x^2 + y^2 + xy) + \frac{1}{2}\mathrm{B}(x + y) \ldots\ldots\ (10).$$

Para determinar x observarémos que si la seccion S fuera un trapecio de cota x, estaria representada (form. 2), por

$$\mathrm{S} = \mathrm{B}x + rx^2,$$

que da:

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{2r} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{B}}{2r}\right)^2 + \frac{\mathrm{S}}{r}} \ldots\ldots\ldots\ (11);$$

pero S se compone del trapecio *nbet*, y de los triángulos *abn* y *tef*, que tienen por valor:

$$nbet = \mathrm{B}d,$$

$$abn = c \times \frac{a'b'}{2} = (d - \frac{1}{2}\mathrm{B}p) \times \frac{(d - \frac{1}{2}\mathrm{B}p)r}{2(1+pr)} = \frac{1}{8}\,\frac{(2d - \mathrm{B}p)^2r}{1+pr},$$

$$tef = \frac{1}{8}\cdot\frac{(2d + \mathrm{B}p)^2r}{1 - pr};$$

y por tanto,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\,\frac{4\mathrm{B}d + \mathrm{B}^2p^2r + 4d^2r}{1 - p^2r^2} \ldots\ldots\ (12):$$

por consiguiente,

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{2r} + \frac{\mathrm{B} + 2dr}{2r\sqrt{1 - p^2r^2}} \ldots\ldots\ (13);$$

y del mismo modo

$$y = -\frac{\mathrm{B}}{2r} + \frac{\mathrm{B} + 2d'r}{2r\sqrt{1 - p'^2r^2}} \ldots\ldots\ (14).$$

Sustituyendo estos valores en el de V_1, y haciendo las reducciones posibles, resulta:

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{12}\left[\frac{(1-p^2r^2)\left[-\frac{\mathrm{B}^2}{r}+2\mathrm{B}d'p'^2r+4d'^2r\right]+(1-p'^2r^2)[\mathrm{B}^2p^2r+4d^2r]+4\mathrm{B}(d+d')-4\mathrm{B}r^2(d'p^2+dp'^2)}{(1-p^2r^2)(1-p'^2r^2)} + \frac{(\mathrm{B}+2dr)(\mathrm{B}+2d'r)}{r\sqrt{(1-p^2r^2)(1-p'^2r^2)}}\right] \ldots\ldots\ (\mathrm{n});$$

expresion del volúmen que da el método propuesto en funcion de las mismas variables.

El volúmen V_2 del prisma correspondiente al método del área media tiene por expresion

$$\mathrm{V}_2 = \frac{\mathrm{S} + \mathrm{R}}{2};$$

y poniendo por S el valor de arriba y por R el suyo que es

$$\mathrm{R} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4\mathrm{B}d' + \mathrm{B}^2p'^2r + 4d'^2r}{1 - p'^2r^2} \ldots\ldots\ (15),$$

se tiene:

$$\mathrm{V}_2 = \frac{1}{12}\,\frac{(1-p^2r^2)\left[6\mathrm{B}d' + 6d'^2r + \frac{3}{2}\mathrm{B}^2p'^2r\right] + (1-p'^2r^2)\left[6\mathrm{B}d + 6d^2r + \frac{3}{2}\mathrm{B}^2p^2r\right]}{(1-p^2r^2)(1-p'^2r^2)} \ldots\ldots\ (\mathrm{p}),$$

que es el volúmen obtenido por el método del área media.

JUAN LOPEZ DEL RIVERO.

(Se continuará.)

PARTE OFICIAL.

13 de Abril (*Gaceta* del 17). Real órden autorizando á D. José Beronda y Espina para derivar del rio Jarama 1.000 litros de agua por segundo con destino al riego de la finca del *Porcal*, que po-