mada ó empedrada para hacer inalterable dicha arista.

Lo primero no siempre podrá verificarse, por falta de espacio en que se haya de construir el camino; pero sea adoptando el primer medio ó el segundo, es circunstancia indispensable procurar que la pendiente longitudinal del camino de servicio resulte la menor posible en su union con la carretera, y por esto convendria que en los estudios de los proyectos se tuvieran presentes las condiciones con que deben construirse las rampas y caminos de servicio, á fin de que se conserven bien las obras de las carreteras con las cuales han de empalmar, imponiendo para su construccion las condiciones convenientes.

(Se continuará.)

M.

Los grandes adelantos que recientemente se han hecho en Hidráulica y la importancia que ha dado á la Memoria objeto del siguiente informe, la Academia de Ciencias de París, nos inducen á publicarle tomándolo del periódico *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.*

HIDRODINÁMICA.

INFORME SOBRE LA MEMORIA DE M. BOUSSINESQ, PRESENTADA EL 28 DE OCTUBRE DE 1872, Y TITULADA ESSAI SUR LA THÉORIE DES EAUX COURANTS (1).

1. Una primera redaccion de este gran trabajo se leyó en la Academia el 15 de Abril de 1872. Su titulo era: *De l'influence des forces centrifuges sur l'écoulement de l'eau dans les canaux prismatiques de grande largeur* (2). En ella se establecian sobre bases racionales sentadas en notas anteriores (3), las ecuaciones del movimiento variado permanente de las aguas por filetes supuestos en un principio sensiblemente rectilíneos; despues el autor calculaba los efectos de las fuerzas centrífugas en los sitios en que la superficie fluida, y por consiguiente, los filetes ofrecen una curvatura vertical pronunciada. Aplicaba sus resultados al estudio de las ondulaciones y otras circunstancias que acompañan el paso del estado uniforme á él variado y recíprocamente: lo que conducia á una primera clasificacion de las corrientes de agua en rios y en torrentes de dos clases. La redaccion nueva comprende á la vez los tubos y los canales, abraza las secciones fluidas de diversas formas, especialmente las que son rectángulos de ancho muy grande, constante ó gradualmente variable, y las que son circulares ó semicirculares, consideradas como correspondiendo al segundo de los dos casos, en cierto modo extremos, entre los que se puede, al ménos por la valuacion de ciertos coeficientes, intercalar las otras formas de seccion por una especie de arbitraje muy suficiente en los cálculos prácticos. El autor trata los casos en que el fondo del canal presenta longitudinalmente, como la superficie de sus aguas, una curvatura sensible y áun ondulada. Aduce consideraciones para aproximar más los hechos, teniendo en cuenta muchos elementos, los resultados de la aplicacion del teorema de pérdida de fuerza viva, de Borda y de la fórmula del resalto. En fin, trata con extension los movimientos no permanentes, como son los que ofrecen los rios en tiempo de crecida, igualmente que las partes de su curso alcanzadas por la marea: é integrando estas ecuaciones para medianos grados de no permanencia, encuentra leyes conformes á las experiencias sobre la propagacion de las ondas é intumescencias en la superficie del agua, teniendo en cuenta las pendientes, los rozamientos y las curvaturas que en ello pueden influir.

2. Los problemas del movimiento variado que ordinariamente afectan las aguas corrientes, son los que hoy importa más estudiar á los hidráulicos. Las fórmulas empíricas formadas para dar relaciones entre el gasto, las secciones y las pendientes, ó lo que es lo mismo, entre las velocidades del gasto y los rozamientos medios del agua contra las paredes entre las que corre, no se refieren más que á los movimientos uniformes. Es preciso absolutamente para los cálculos de los movimientos variados, en que las relaciones mutuas de las velocidades en un mismo punto tienen otros

(1) La Academia ha decidido que este informe, aunque excede la extension marcada en los reglamentos, se inserte íntegro en los *Comptes rendus.*

(2) Su extracto está en la página 1026 del tomo LXXIV de los *Comptes rendus.* El de la redaccion nueva, de 28 de Octubre de 1872, está en la página 1011 del tomo LXXV.

(3) Notas de 29 de Agosto 1870, 3 y 10 de Julio de 1871, en los *Comptes rendus;* tomo LXXI, página 389; tomo LXXIII, páginas 34 y 101.

valores, considerar en detalle las que toman individualmente los diversos filetes; y por una consecuencia necesaria, es preciso conocer las intensidades de sus acciones laterales mutuas, llamadas rozamientos interiores del fluido.

El problema de la valuacion de los rozamientos, ó de las capas fluidas, ha sido largo tiempo, como en otra parte hemos dicho (1), un verdadero enigma, cuya solucion se buscaba mal, y por lo tanto vanamente. Se suponian los movimientos moleculares siempre contínuos y regulares, y se queria que, las intensidades de los rozamientos de los filetes entre sí no dependiesen más que de sus velocidades relativas, aunque numerosos hechos tendieran á hacerles depender tambien de las dimensiones de las secciones fluidas (2), y cosa más notable, de las velocidades absolutas (3). El autor de la *Memoria* que examinamos ha sabido conciliarlo todo, y ha dado para los rozamientos fluidos expresiones cuyas intensidades están de acuerdo con las diversas experiencias, haciendo una distincion entre los movimientos completamente regulares, continuos y sencillos, tales como los que deben tener lugar en el movimiento por tubos muy pequeños y pulimentados, y los movimientos giratorios y tumultuosos (4) produciéndose inevitablemente (así como lo probaba ya en 1868) (5) en los espacios de una cierta extension transversal; espacios en los que no se observa una variacion contínua y regular más que en las *velocidades medias locales* que rigen en cada punto, la *traslacion* de los elementos, ó la *marcha* del fluido haciendo abstraccion de sus rotaciones y oscilaciones. En estos espacios, y vistos los bruscos cambios de magnitud de las velocidades reales de un punto á puntos próximos, el rozamiento mutuo de las capas es de una naturaleza distinta del de los espacios capilares. Su *coeficiente*, ó la cantidad por la que hay que multiplicar la diferencia de las velocidades locales de traslacion de los filetes contiguos para tener su intensidad, es enormemente mayor que en los tubos de ménos de un milímetro de diámetro sobre los que Poiseulle ha hecho sus experiencias. En lugar de ser constante, depende, en cada punto, como ha dicho Mr. Boussinesq, de la *intensidad de la agitacion de torbellino* y de las pérdidas ú ocultaciones de fuerza viva que ella lleva. Puede variar del simple al centuplo y más, segun las dimensiones trasversales del espacio en que los torbellinos tienen la facultad de desarrollarse, segun las velocidades contra las paredes en que toman nacimiento, y segun tambien la forma del contorno de la seccion y las distancias á este contorno, á partir del cual los torbellinos van á ser convergentes ó divergentes, propagándose en sus otras partes.

3. El autor, despues de un preámbulo que resume claramente su *Memoria*, demuestra desde luégo (§§ I y II) que las ecuaciones de hidrodinámica se aplican muy bien á las velocidades que acabamos de llamar *medias locales* al rededor de las que oscilan en cada punto con una especie de periodicidad, las velocidades moleculares reales, que se puede aplicar á estas velocidades y á las acciones exteriores, tambien medias locales, que se desarrollan las seis fórmulas de componentes de presion, tanto normales como tangenciales, de Poisson, Cauchy y Navier, siempre que se considere como variable de un punto á otro este coeficiente de rozamiento interior ε que afecta las velocidades de resbalamiento, así como las diferencias dos á dos de las de extension (6).

Despues (§ 3.°), haciendo para la intensidad del movimiento de torbellino, sobre la que diversos hechos suministran datos acordes, hipótesis plausibles y razonadas, atribuye á este coeficiente ε expresiones tales, que una, relativa á los canales ó tubos de seccion rectangular muy ancha, es proporcional á la vez á la profundidad total y á la velocidad en el fondo, y la otra, relativa á las

(1) *Mémoire sur l'Hydrodynamique des cours d'eau* (*Comptes rendus*), 26 de Febrero, 4, 11 y 18 de Marzo de 1872; tomo LXXIV, páginas 570, 649, 693, 770.

(2) *Comptes rendus*, 16 de Febrero de 1846; tomo XXII, página 309.—Idem, 26 de Agosto de 1850; tomo XXXI, página 286. *Annales de Mines;* tomo XX, 1851, página 219, en el número 14 de una Memoria: *Fórmulas y tablas nuevas*, etc. DARCY, *Recherches sur les mouvements de l'eau dans les tuyaux*, página 181.

(3) BAZIN, *Recherches hydrauliques*, 1.ere partie, 1865; introduction, página 30.

(4) PONCELET, *Introduction à la Mécanique industrielle*, número 375.

(5) *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements reguliers des fluides*, § IX del *Journal de M. Liouville*, tomo XIII. Véase tambien la *Memoria citada sobre la hidrodinámica de los cursos de agua*, cuarto artículo (28 de Marzo de 1872), número 11, página 771.

(6) Así como ha dicho en otra parte, *Note sur la Dynamique des fluides*, *en los Comptes rendus*, de 27 de Noviembre de 1843; tomo XVIII, página 1240. *Informe sobre una Memoria de M. Kleitz*, 12 de Febrero de 1872; tomo LXXIV, página 426.—*Memoria* (ya citada) *sobre la hidrodinámica de las corrientes de agua;* primer artículo, 26 de Febrero de 1872; tomo LXXIV, página 572.

secciones circulares ó semi-circulares, lo es al radio, á la velocidad contra la pared y á la relacion del radio á la distancia de cada punto al centro, en que los torbellinos van en cierto modo á acumularse ántes de *destruirse* (como decia Leonard de Vinci), ó de resolverse en vibraciones caloríficas.

Estas hipótesis se encuentran justificadas por el establecimiento de la ecuacion del movimiento uniforme ó por filetes paralelos; porque de ella resulta para las velocidades individuales, á diversas distancias de la superficie libre en el primer caso, y del centro en el segundo, leyes representadas por parábolas de segundo y de tercer grado, lo que se encuentra conforme, así como otros resultados del cálculo, con las experiencias hidrométricas, convenientemente discutidas, de Darcy, de Mr. Bazin, de Mr. Boileau, etc.

De esto mismo y de resultados medios de experiencias de aforo de corrientes, Mr. Boussinesq deduce los valores aproximados ó medios 0,0006386 y 0,0008094 correspondientes á dos cantidades determinadas, la una A, entrando en sus dos fórmulas de rozamiento interior, la otra B, por la que multiplica el cuadrado de la velocidad, u_0 *contra las paredes* del canal, para tener, en cada uno de los puntos de estas paredes, el rozamiento retardador que ejercen por unidad superficial, dividido por el peso de la unidad de volúmen de fluido. Estos números, ademas, varian con el grado de rugosidad del suelo, y tambien, sobre todo el segundo, un poco con el radio medio de la seccion igualmente que u_0.

Con las expresiones así formadas de las dos especies de rozamientos, el autor puede abordar el establecimiento de la ecuacion del problema del movimiento variado permanente.

Es sabido que una solucion de este importante problema fué propuesta desde 1828 por Mr. Belanger (1) y por Poncelet (2), los que para una corriente contenida en un lecho prismático, han introducido en la ecuacion del movimiento un término que valúa las inercias puestas en juego por el cambio de la velocidad media de una seccion á la otra. Vauthier, en 1836 (3), ha hecho esta solucion aplicable á un lecho de forma cualquiera, y el mismo año, Coriolis la ha modificado (4), observando que, en el término que proviene de la inercia ó del cambio de magnitud de la fuerza viva de las secciones fluidas, se debe en razon de la desigualdad de las velocidades de sus diversos filetes, afectar el cuadrado de la velocidad media de un coeficiente numérico llamado α, un poco más grande que la unidad, y midiendo la relacion media de los cubos de las velocidades individuales al cubo de esta velocidad media.

Todo el mundo, despues, ha establecido la ecuacion segun el sistema de Coriolis, por el principio de las fuerzas vivas, suponiendo, explícita ó implícitamente, que los rozamientos tanto interiores como exteriores, tienen en cada seccion la misma intensidad que tendrian en un movimiento uniforme para las mismas secciones, y la misma velocidad media á traves de cada una de ellas, de modo que se pudiese calcular la suma total de sus trabajos multiplicando sólo el rozamiento de las paredes, tal cual le dan las fórmulas empíricas del caso de la uniformidad, por el espacio recorrido en virtud de esta velocidad media (5).

Mr. Boussinesq ha demostrado, en 1870 y 1871, que esta hipótesis relativa á los trabajos de los rozamientos era doblemente inexacta. Tampoco se sirve del teorema de las fuerzas vivas, cuyo empleo parece que debe abandonarse aquí, porque nada indica *à priori* en el movimiento no permanente, cuál debe ser el trabajo de las fuerzas interiores. Él hace uso del teorema de las cantidades de movimiento, ó lo que es igual, establece, del mismo modo que Euler, las dos ecuaciones de equilibrio dinámico, en una direccion longitudinal sensiblemente horizontal y en dos direcciones perpendiculares, una sensiblemente vertical, de un elemento fluido rectángulo, bajo la accion de la gravedad, de la inercia, de las presiones normales, y por último, de los rozamientos ó presiones tangenciales que soliciten sus caras.

Se limita á considerar el movimiento *gradualmente* variado, llamando así al que su no-uniformidad depende de cantidades cuyos cuadrados y productos se suponen despreciables en los cálcu-

(1) *Essai sur la solution de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courants.*

(2) *Cours (ultérieurement lithographié) de l'école de Metz. Levers d'usines.*

(3) *Annales des Ponts et Chaussées*, primer semestre de 1836. *De la théorie du mouvement permanent des eaux.*

(4) *Annales des Ponts et Chaussées. Sur l'établissement de la formule qui donne la figure des remous et de la correction à y introduire.*

(5) *Cours fait à l'école Centrale, par M. Belanger ; lithographié en 1846.*

los, tal cual es, por ejemplo, la inclinacion de la superficie fluida sobre el fondo.

No ocupándose primeramente más que de las porciones de la corriente en las que la curvatura de los filetes es insensible, de modo que pueda hacerse abstraccion de las fuerzas centrífugas, se deduce para la presion, de una de las ecuaciones diferenciales, un valor puramente hidrostático. Sustituyéndole en la primera de las tres, é integrando todos sus términos desde la superficie hasta el fondo ó las paredes, no queda más rozamiento que el que éstas ejercen sobre los filetes fluidos que corren á lo largo de sus superficies. La inercia que depende de la aceleracion longitudinal, está representada por la suma de tres términos diferenciales, que el autor reduce á uno solo por medio de la ecuacion de *continuidad* ó de conservacion de volúmenes, añadiendo la hipótesis, aquí suficientemente aproximada, de que la pequeña inclinacion de los filetes fluidos varía linealmente desde la superficie, ó desde su filete central hasta el fondo ó los bordes.

Llega así á una ecuacion de movimiento que tiene analogía con la que suministra el teorema de las fuerzas vivas; pero entre ellas encuentra dos diferencias esenciales.

Consiste la una en que el término procedente de las inercias es igual á la derivada longitudinal de la altura debida á la resistencia media, multiplicada, no por el coeficiente α de Coriolis, sino por otro número cuyo exceso sobre la unidad es próximamente tres veces menor, y que es la relacion media de los *cuadrados* de las velocidades individuales al cuadrado de la velocidad media en la misma seccion trasversal, en lugar de ser la de los *cubos* de las mismas velocidades.

La otra diferencia procede del rozamiento retardador del fondo ó de las paredes. Este rozamiento depende de las velocidades de los filetes que les son contiguos; pero éstas tienen en el movimiento variado otras relaciones con la velocidad media, distintas del movimiento uniforme. Es preciso, pues, para tener el verdadero valor del rozamiento en cuestion, ó de la pendiente y superficie que exige para ser excedido, añadir al término que representa la que se le atribuye para la misma velocidad media en el movimiento uniforme, otro término que depende del grado de convergencia ó de divergencia de los filetes fluidos.

Como la cantidad por la que este grado se mide se supone bastante pequeña, segun se acaba de indicar, para que su cuadrado sea despreciable, resulta que el término ó la pendiente adicional de que se trata corresponde á la derivada de la altura debida á la velocidad media multiplicada por un coeficiente numérico, que es ligeramente variable con la forma de la seccion fluida de la corriente de agua.

Llamando 6 este coeficiente, y $l+\eta$ el primero (el que en la expresion de la inercia procede de la desigualdad de las velocidades á traves de cada seccion), I la pendiente de la superficie, que se puede tambien llamar $\frac{d\zeta}{ds}$ derivada, respecto de la abscisa longitudinal s, de la ordenada ζ de la superficie fluida debajo de un plano horizontal fijo; por último, ρ la densidad, g la gravedad y F_n la intensidad media del rozamiento de la unidad superficial del fondo y de las paredes al rededor de la seccion cuya abscisa es s, tal cual seria esta intensidad en un movimiento *uniforme* para la misma velocidad media U, la misma superficie ω y el mismo perimetro mojado χ de la seccion; esta ecuacion es:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \mathrm{I} = \frac{\chi}{\omega}\,\frac{F_n}{\rho g} + (1+\eta+6)\,\frac{d}{d\delta}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

6. Para calcular los dos coeficientes $l+\eta$ y ζ, que deben afectar la derivada longitudinal de la altura debida á la velocidad de gasto del fluido, es preciso conocer, para cada seccion, las velocidades individuales de las que aquella velocidad es la media. La determinacion de una cualquiera de estas velocidades depende de una ecuacion diferencial de segundo órden, cuyo segundo miembro contiene, en el cuadrado, la incógnita introducida en una integral afectada de una pequeña cantidad que mide el grado de variacion del movimiento. La integracion no puede hacerse exactamente; pero el autor la resuelve por un procedimiento ingenioso de aproximaciones sucesivas. Consiste éste en reemplazar primeramente por cero el segundo miembro, es decir, en tachar provisionalmente los términos debidos á la no-uniformidad; á deducir entónces de la ecuacion, por medio de una doble y fácil integracion de sus términos para toda la extension de la superficie fluida, una primera aproximacion que da lo que es, en el movimiento uniforme, la velocidad particular buscada; despues á sustituir su expresion, que es

un binomio de segundo grado, en el segundo miembro restablecido. Las integraciones de los términos, despues de esta sustitucion, son tan fáciles como cuando no se consideraba este segundo término, y se deduce de este modo para la velocidad á una profundidad cualquiera, una expresion de sexto grado, obteniendo por esta segunda aproximacion lo que se buscaba. Esta aproximacion es suficiente en la cuestion propuesta, porque si por el mismo procedimiento se formaba, lo que tambien sería fácil, una expresion de tercera aproximacion, no diferiria de lo que da la segunda más que en términos afectados de cuadrados y productos de cantidades que han sido despreciadas en el curso del cálculo por ser muy pequeñas.

Los coeficientes numéricos $l+\eta$ y δ se pueden deducir fácilmente. Se observa que sólo son funciones de la relacion $\frac{B}{A}$ de los dos números A, B, que entran respectivamente (núm. 3) en las expresiones atribuidas al rozamiento interior ó mutuo de los filetes, y al rozamiento exterior ó de las paredes.

Para las secciones rectangulares considerablemente más anchas que profundas se tiene:

$$1+\eta=1+\frac{1}{45}\left(\frac{\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{3A}}\right)^2;$$

$$\delta=\frac{4}{45}\frac{B^2}{A^2}\frac{1+\frac{2}{7}\frac{B}{A}}{\left(1+\frac{B}{3A}\right)^3};$$

y para las secciones circulares ó semicirculares se tiene:

$$1+\eta=1+\frac{1}{25}\left(\frac{\frac{B}{A}}{1+\frac{2}{5}\frac{B}{A}}\right)^2;$$

$$\delta=\frac{4}{26}\frac{B^2}{A^2}\frac{1+\frac{4}{11}\frac{B}{A}}{\left(1+\frac{2}{5}\frac{B}{A}\right)^3}$$

ó respectivamente, adoptando $\frac{B}{A}=1,2674$, que se obtiene, como se ha dicho, por resultados medios de las experiencias sobre el movimiento uniforme:

$$1+\eta=1,0176, \quad \delta=0,0675$$

y

$$1+\eta=1,0283, \quad \delta=0,1097.$$

De lo que resulta:

$$1+\eta+\delta=\begin{cases}1.0851 \text{ en los canales de rectángulos anchos.}\\ 1,1380 \text{ en los canales semi-circulares.}\end{cases}$$

La media aritmética de estos dos números es 1,11.

Este valor se aproxima al que muchos ingenieros adoptan en la práctica para el coeficiente α de Coriolis, que afecta, como $l+\eta+\delta$, la derivada de $\frac{U^2}{2g}$ en la ecuacion del movimiento. Esta concordancia aparente no debe dar lugar á creer que la nueva manera de establecer todo lo relativo al movimiento permanente se asemeje á la otra, que hemos dicho adolece de dos errores.

(Se continuará.)

DERECHOS PASIVOS.

Para los derechos pasivos, los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, y los Celadores de Caminos, hoy Ayudantes de Obras públicas, pertenecen al antiguo Monte-Pío de Correos, para el cual hicieron los correspondientes descuentos hasta el año 1845, en que fué suprimido, y se declararon clasificados dichos empleados, con derecho á seguir percibiendo los haberes pasivos que, con sujecion al reglamento del mencionado Monte, les correspondian. Creemos oportuno y útil publicar la parte de este reglamento que fija las pensiones que á las viudas y huérfanos de las expresadas clases han de satisfacerse.

REGLAMENTO *para el Monte-Pío de viudas y huérfanos de los empleados en las oficinas de la Renta general de estafetas, correos y postas de dentro y fuera de la córte, la de caminos y Real imprenta, resuelto por S. M. en 22 de Diciembre de* 1785, *y para regir desde* 1.° *de Enero siguiente de* 1786.

CAPÍTULO III.

PENSIONES QUE SATISFARÁ EL MONTE, Y CASOS EN QUE DEBERÁN CESAR.

ARTÍCULO PRIMERO. Las viudas y huérfanos