RECTIFICACION DE CURVAS.

MÉTODO DE M. SOMOFF.

Pocos dias despues de haber remitido mi anterior artículo sobre la rectificacion de las líneas, encontré en la entrega de *Les Mondes*, correspondiente al 25 de Enero, un extracto del método propuesto por M. Somoff en el *Boletin de ciencias* de San Petersburgo (1870-1871), para la resolucion del mismo problema.

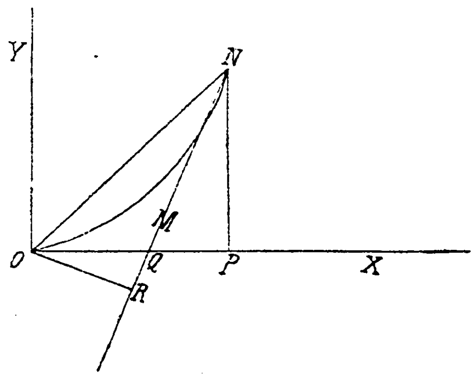
Aun cuando no conozco los detalles del método propuesto, ni áun siquiera la demostracion que de él ha dado su autor, he juzgado oportuno copiar literalmente el extracto que publica el periódico de M. Moignó, para que llegue á noticia de los lectores de la REVISTA, y puedan tenerle presente en sus investigaciones.

«*Sobre la rectificacion aproximada de curvas arbitrarias*, por M. Somóff.— Este procedimiento de »rectificacion está completamente comprendido en »el siguiente teorema: la longitud de un arco bas»tante pequeño para que pueda despreciarse su »quinta potencia, es igual á cuatro tercios de la »cuerda, ménos la sexta parte de la suma de las »proyecciones de esta cuerda sobre las tangentes »extremas. Para un arco de círculo de 20°, el error no es más que una cienmilésima» (1).

Para demostrar este teorema puede referirse la curva que se trata de rectificar, á un sistema de coordenadas rectangulares, formado por una de las tangentes y la perpendicular á ella levantada en su extremo.

Si se desarrolla en serie el valor de la ordenada, y se tiene presente que ella y su derivada deben ser iguales á o para $x = o$, resultará que, despreciando las potencias superiores á la cuarta

$$y = \mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{B}\,x^3 + \mathrm{C}\,x^4$$



$$\frac{dy}{dx} = 2\,\mathrm{A}\,x + 3\,\mathrm{B}\,x^2 + 4\,\mathrm{C}\,x^3$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 1 + 2\,\mathrm{A}^2 x^2 + 6\,\mathrm{A\,B}\,x^3$$

$$\text{La cuerda O N} = \sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{\mathrm{A}^2 x^3}{2} + \mathrm{A\,B}\,x^4.$$

Su proyeccion O P sobre la tangente O X, es x, su proyeccion sobre la otra tangente es la distancia que hay desde el punto N á la recta O R que tiene por ecuacion $\mathrm{Y} = -\frac{dx}{dy}\mathrm{X}$, y segun un teorema muy conocido,

$$\mathrm{N\,R} = \frac{y + \frac{dx}{dy}x}{\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}} = \frac{y\frac{dy}{dx} + x}{\sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1}} = x - \mathrm{A\,B}\,x^4$$

La longitud O M N del arco de curva es

$$\int_0^x \frac{ds}{dx} = x + \frac{2}{3}\mathrm{A}^2 x^3 + \frac{3}{2}\mathrm{A\,B}\,x^4.$$

De estos valores se deduce inmediatamente que

$$\frac{4}{3}\mathrm{O\,N} - \frac{1}{6}(\mathrm{O\,P} + \mathrm{N\,R}) = \mathrm{O\,M\,N}.$$

De manera que, llamando S al arco de curva, C á la cuerda, y P y P′ á las proyecciones de la cuerda sobre las tangentes extremas

$$\mathrm{S} = \frac{4}{3}\mathrm{C} - \frac{1}{6}(\mathrm{P} + \mathrm{P}') \qquad (1).$$

---

(1) Iguales resultados de aproximacion se obtienen con la fórmula que propuse en mi artículo anterior. En efecto:

$$\mathrm{O\,N} = \sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{\mathrm{A}^2 x^3}{2} + \mathrm{A\,B}\,x^4$$

$$\mathrm{O\,Q} = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}\,;\ \mathrm{N\,Q} = y\,\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\mathrm{O\,Q} + \mathrm{Q\,N} = x + \frac{y\left(\frac{ds}{dx} - 1\right)}{\frac{dy}{dx}} = x + \mathrm{A}^2 x^3 + \frac{5}{2}\mathrm{A\,B}\,x^4$$

de donde se deduce que

$$\frac{2\,\mathrm{O\,N} + \mathrm{O\,Q} + \mathrm{Q\,N}}{3} = x + \frac{2}{3}\mathrm{A}^2 x^3 + \frac{3}{2}\mathrm{A\,B}\,x^4 = \mathrm{O\,M\,N}$$

cuando se desprecian las potencias de x superiores á la cuarta. El error para un arco de círculo de 20° es 0,000016.

Tal es la fórmula propuesta por M. Somoff, que da lo mismo que la fórmula

$$S = \frac{2}{3} C + \frac{1}{3} (T + T') \qquad (2)$$

propuesta por mí, los valores exactos de un arco de curva cuando se desprecian las potencias de la abscisa superiores á la cuarta.

Aplicada esta fórmula á la determinacion de la longitud de arcos circulares, da valores menores que los del arco de círculo, miéntras que la fórmula [2] los da algo mayores, lo cual indica que la curva cuya longitud exacta fuese la representada por la fórmula de M. Somoff, seria más abierta que el arco de círculo que tuviese la misma cuerda y tangentes, y que, por lo tanto, para las curvas cerradas dará resultados más aproximados la propuesta por mí, al paso que para las curvas circulares, ó más abiertas que éstas, será preferible bajo el punto de vista de la exactitud, áun cuando no bajo el de la sencillez, la propuesta por M. Somoff.

El límite del cual no debe pasarse en la aplicacion de estas fórmulas, es el de 30° para ángulo de la tangente y la cuerda, y en este caso extremo los errores relativos que se cometan al medir curvas circulares, son,

con la fórmula [1] $e = -0{,}0024$
con la fórmula [2] $e = +0{,}0042$

En las curvas parabólicas, los errores para el mismo límite son,

con la fórmula [1] $e = -0{,}0084$
con la fórmula [2] $e = -0{,}0014$.

Estando fundadas estas dos fórmulas de aproximacion en la misma hipótesis de poder ser despreciadas las potencias de la abscisa superiores á la cuarta, se podrán establecer entre ellas diversas relaciones, que darán lugar á otras fórmulas aproximadas, susceptibles de ser ventajosamente aplicadas en la resolucion de algunos problemas entre los arcos, sus tangentes extremas, sus cuerdas y sus proyecciones sobre éstas; así, por ejemplo, si entre las dos fórmulas se elimina á C, resultará

$$S = \frac{2}{3} (T + T') + \frac{1}{6} (P + P'),$$

si se elimina á S,

$$C = \frac{T + T'}{2} + \frac{P + P'}{4}$$

sumando el doble de la fórmula [1] con la fórmula [2], y dividiendo el resultado por 3, se obtiene la fórmula

$$S = \frac{10}{9} C + \frac{1}{9} (T + T') - \frac{1}{9} (P + P'),$$

que dará errores muy pequeños aplicada á la medida de arcos de círculo, porque, segun he indicado anteriormente, los errores dados por estas dos fórmulas son de signo contrario, y el dado por la fórmula [2] es sensiblemente igual al doble del de la fórmula [1].

Para un arco de 90° el error es de 0,00057 R, y como en este caso $P = P' = T = T'$, resulta que aproximadamente

$$\pi = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

ó sea los $\frac{5}{9}$ del perímetro del cuadrado inscrito.

Otras muchas propiedades podrán deducirse de la aplicacion y combinacion de estas fórmulas, pero no me detendré á exponerlas, porque mi único objeto al escribir estas líneas ha sido poner en conocimiento de los lectores de la Revista el método de M. Somoff, y temeria molestarles si prolongase más este artículo.

RECTIFICACION.

La inadvertida supresion de un exponente al sustituir en la fórmula [1] del artículo publicado en el Número 3 en vez de c a é y sus valores, omision que no fué observada hasta despues de remitido el citado artículo á la Redaccion de la Revista, ha hecho que aparezcan inexactas las fórmulas [2] y [3] y los valores de R consignados en la tabla.

Aun cuando esta inexactitud no influye en manera alguna sobre la fórmula propuesta para la rectificacion de las líneas, que no depende de los valores de X ni de R, he juzgado oportuno dar de nuevo estos valores corregidos para que puedan tenerse presentes en las aplicaciones.

$$X = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{(T+Y)^3}{T-Y}} - \sqrt{\frac{(2\,Y)^3}{T-Y}}\right] \qquad [2]$$

$$R = \frac{1}{3}\left[\frac{1 + r - 2r\sqrt{\frac{2r}{1+r}}}{1-r}\right] \qquad [3]$$

r	R
1,0	0,500
0,9	0,493
0,8	0,484
0,7	0,477
0,6	0,467
0,5	0,455
0,4	0,442
0,3	0,425
0,2	0,404
0,1	0,376
0,0	0,333

Laureano G. Santa María.