caso particular, aunque muy importante en algunas localidades; los siniestros causados por las avenidas en las corrientes de carácter torrencial, en los cuales los preservativos difieren radicalmente de los que aconsejamos para los rios en su parte media ó baja.

P. P. de la S.

TEORÍA
DEL
CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Conclusion.*)

Con esto hemos concluido la determinacion de todas las fórmulas relativas á las vigas de número par de tramos, y sólo nos resta, para terminar nuestro trabajo, describir las tablas que han de servir para la aplicacion práctica del método que hemos explicado con todo detalle en los dos últimos capítulos.

64. *Disposicion de las tablas numéricas.*—La tabla 1.ª nos da las ordenadas de la parábola $y = \frac{1}{2} x^2$, cuya construccion gráfica es indispensable, para la determinacion de las líneas envolventes de los momentos de flexion. Se han calculado 100 ordenadas, cuyas abscisas varian de 0,01 en 0,01, de manera que, tomando por unidad la longitud l de uno de los tramos intermedios de la viga, bastará dividirla en 100 partes, y tomar para las ordenadas los valores de la referida tabla, á fin de trazar la parábola y construir la plantilla correspondiente: estos datos son muy suficientes para el objeto, pero, si se considerasen necesarios mayor número de puntos por ejemplo, 1.000, sería muy fácil hallar las ordenadas, tomando la mitad de los números de una tabla de cuadrados.

La tabla 2.ª contiene las abscisas M P y N Q (*figura* 3.ª) (1), correspondientes á los puntos P y Q, en que se cortan las rectas de los momentos debidos á las sobrecargas de los demas tramos, para los valores de δ comprendidos entre 0,00 y 1,30, aumentando en 0,05, y para las vigas desde 1 hasta ∞ número de tramos con la sola excepcion de los tramos extremos.

La tabla 3.ª determina las ordenadas Pp y Qq (*figura* 2.ª) de la parábola de la carga aislada, que las hemos calculado para mayor exactitud, aún cuando no es necesario, porque la construccion gráfica de la referida figura, explicada en el número 7, sirve para trazar dicha curva, y pueden medirse con la escala aquellas ordenadas.

La tabla 4.ª nos da los momentos PP′ y QQ′ debidos á la carga permanente, fórmulas (68) (69) y (69 bis) para los mismos valores de δ y de n; y la tabla 5.ª, las ordenadas constantes TT′ (*figura* 5.ª) de aquellas parábolas; y si recordamos la explicacion para su trazado, hecha en el número 39, deduciremos que tampoco es indispensable la tabla 4.ª, puesto que bastaría que nos diese el valor de PP′ para un solo tramo, porque uniendo P′ y T′ por la plantilla parabólica de eje vertical, se conocerian los momentos en los dos apoyos inmediatos, y con los puntos fijos de aquellos tramos se trazarian las parábolas de los contiguos, y así sucesivamente.

Las tablas 6.ª y 7.ª contienen respectivamente los momentos $PP^{2°}$ y $QQ^{2°}$, correspondientes al caso 2.° de la distribucion de la sobre-carga, para los mismos valores de δ y n, que están dados por las fórmulas (75) y (76); pero prescindiendo del último término, ó sea la ordenada de la carga aislada, y como los valores de $QQ^{2°}$ sólo difieren de los de $PP^{2°}$ en $\frac{1}{4}$ de la abscisa NQ conocida por la tabla 2.ª, re-

(1) Véase la lámina 83 del tomo VIII de la 2.ª serie.

sulta que para pasar de la tabla 6.ª á la 7.ª ha bastado una simple sustraccion para obtener cada resultado.

El método que hemos desarrollado en esta Memoria, de reemplazar la determinacion de los momentos de los diversos apoyos por los relativos á los puntos P y Q, sufre una sola excepcion para los tramos extremos, que consiste en que el P se traslada al último apoyo, y el Q desaparece, porque procederia de las sobrecargas de los tramos más distantes que el último, que por consiguiente no existen. Sin embargo, de los tres casos distintos á que hemos reducido el estudio de las líneas envolventes, no hay que calcular en el tramo primero más que el de la carga aislada, porque los momentos en el 2.° apoyo, tanto para la carga permanente, como para las líneas envolventes, se conocerán por el estudio del tramo 2.°, y el de la sobrecarga del 1.er tramo tampoco exige nuevos cálculos, porque si se examina la figura 4.ª haciendo $k=2$, en cuyo caso el apoyo extremo será el $k-1$, se deduce que el momento N_2, debido á la carga aislada del 1.er tramo, será igual á $M_2^{1.°} - M_2^{6.°}$, que corresponden en el contiguo al 1.er y 6.° caso.

En resúmen, la determinacion de los momentos de flexion de las vigas, desde uno hasta infinitos tramos, para 13 valores de δ, se ha reducido al cálculo de siete tablas de reducidas proporciones, y si observamos, como hemos indicado anteriormente, que la primera está tomada de una tabla de cuadrados, que la 3.ª es innecesaria, porque puede sustituirse con una sencilla construccion gráfica; que la 4.ª puede suprimirse casi en su totalidad, valiéndonos de la 5.ª, y que la 7.ª se deduce de la 6.ª con sólo restar la 4.ª parte de los números dados por la 2.ª, se comprenderá que el método que hemos expuesto es bastante más sencillo que los conocidos anteriormente, puesto que las tablas de M. Bressé son mucho más voluminosas, á pesar de que sólo se refieren á 8 valores de δ, y vigas de 1 hasta 12 tramos.

Antes de concluir debemos advertir que si bien en la introduccion de este trabajo indicamos que las tablas que acompañariamos comprenderian las vigas de 1 á 12 tramos, no nos ha exigido emprender nuevos cálculos la determinacion de los momentos hasta las que tienen número infinito de aquellos.

65. *Aplicacion á un ejemplo.*—Supongamos que se trata de calcular una viga de nueve tramos, siendo $\delta=0{,}80$; fijémonos, por ejemplo, en el tramo 4.°, y vamos á determinar la línea envolvente de los momentos de flexion.

Las tablas 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, 6.ª y 7.ª nos dan respectivamente:

Abscisas	$MP =$	$0{,}211356$	$NQ =$	$0{,}211327$
Carga aislada	$Pp =$	$-0{,}030503$	$Qq =$	$-0{,}030502$
Id. permanente	$PP' =$	$-0{,}000093$	$QQ' =$	$-0{,}000006$
Id. id.		»	$TT' =$	$0{,}013888$
Caso 2.°	$PP^{2.°} =$	$0{,}040662$	$QQ^{2.°} =$	$-0{,}011236$

Para hallar ahora los momentos en los mismos puntos P y Q, correspondientes á los otros cinco casos de la reparticion de la sobrecarga, no tenemos más que recordar las relaciones establecidas en el número 56, y tendrémos

$$
\begin{aligned}
PP^{1.°} &= PP^{2.°} + Pp &&= 0{,}010159\\
PP^{3.°} &= PP^{2.°} &&= 0{,}040662\\
PP^{4.°} &= PP' - PP^{1.°} &&= -0{,}010252\\
PP^{5.°} &= PP' - PP^{2.°} &&= -0{,}040762\\
PP^{6.°} &= PP^{5.°} &&= -0{,}040762
\end{aligned}
$$

é igualmente

$$
\begin{aligned}
QQ^{1.°} &= QQ^{2.°} + Qq &&= -0{,}041738\\
QQ^{3.°} &= QQ^{4.°} = QQ' - QQ^{1.°} &&= 0{,}041732\\
QQ^{5.°} &= QQ' - QQ^{2.°} &&= 0{,}011242\\
QQ^{6.°} &= QQ^{1.°} &&= -0{,}041738
\end{aligned}
$$

Ahora bien: este ejemplo es enteramente análogo al representado en la figura 11.ª, de manera que si se unen por la plantilla parabólica las extremidades de las ordenadas $PP^{1.°}$ y $QQ^{1.°}$, $PP^{5.°}$ y $QQ^{5.°}$, y por último, $PP^{6.°}$ y $QQ^{6.°}$, y respectivamente por líneas rectas las de $PP^{2.°}$ y $QQ^{2.°}$, $PP^{3.°}$ y $QQ^{3.°}$; $PP^{4.°}$ y $QQ^{4.°}$, quedará determinado el polígono envolvente, compuesto de los siete trozos representados con línea gruesa en dicha figura. Hecho esto, no habrá más que multiplicar los números abstractos deducidos para los momentos por pl^2, é igualando al momento de rotura $\frac{RY}{v'}$, se calcularán las dimensiones del tramo 4.°, y de igual manera se procederá para los demas intermedios.

Para el primer tramo se conocerán las parábolas de la carga permanente y del caso 1.°, por el estudio del tramo inmediato, segun hemos dicho en el número anterior, y la parábola de la carga aislada, tomando $N_2 = M_2^{1.°} - M_2^{6.°}$, puesto que sabemos que, ademas, debe pasar por la extremidad de la viga. En el caso actual el número de trozos en que se divide el tramo se reduce á tres, y basta calcular la parábola del caso 1.°, la recta del 2.° que se obtiene restando en el 2.° apoyo el momento de la carga aislada, y su parábola complementaria, que es la del caso 5.°

Una vez hallada la línea envolvente de los momentos de flexion, correspondiente á los diversos casos de distribucion de la sobrecarga, habria que añadir la relativa á la carga permanente, segun explicamos en el número 56, y la determinacion de los esfuerzos trasversales será muy fácil, conforme á las consideraciones del número 57.

Por último, el cálculo de una viga de número par de tramos se haria exactamente lo mismo, segun demostramos en el teorema fundamental del número 58.

Bilbao, Setiembre de 1869.

PABLO DE ALZOLA.