

naturaleza de la obra? Es evidente que para llenar todas las condiciones del programa, debe estar abierta, y no formar embalse mientras la cantidad de agua que lleva el río no produzca inundación aguas abajo; es decir, que necesita un desagüe igual, *por lo ménos*, al de las crecidas ordinarias, y esto supone el establecimiento de una presa sobre un puente. Esto no basta; es preciso, á medida que la crecida aumenta, tener la facultad de disminuir la sección de desagüe de tal modo, que éste permanezca invariable é inferior al que produciría la crecida aguas abajo. ¿Es posible establecer aparatos con que esto se consiga? En el actual estado de la industria lo creemos imposible. Y no se diga que las compuertas de los pantanos de riego y navegación funcionan á profundidades mayores; aquellos ocupan una área muy exigua comparada con las del desagüe que, en el caso de una avenida, sería indispensable; la gran velocidad que el agua tomaría es otra dificultad más que vencer; y por último, las compuertas de aquellos pantanos están en uso continuo, cuando las de éstos funcionarían sólo á intervalos muy largos y en casos raros; sucediendo con frecuencia encontrar inutilizados los aparatos, ó en tal estado de adherencia sus órganos, que fuese imposible hacerlas trabajar.

Algunos han creído que los portillos de navegación, las presas móviles y otras construcciones tendrían aquí cómoda aplicación. Debemos hacer notar que estos aparatos sólo están dispuestos para funcionar en pequeñas profundidades de agua, y que, en vez de cerrarse cuando el nivel del río sube, se abren para dejar paso al exceso de agua que el río lleva. Si aún en estos casos su maniobra es difícil, y aventurada en algunos, en el que examinamos, nos atrevemos á afirmar su absoluta imposibilidad.

TERMODINAMICA.

CAPÍTULO VI.

Del calor como fuerza viva.

99. ÉTER. — Dos elementos forman la base de la física matemática, á saber: el *éter* y la *materia ponderable*.

Se considera formado el éter de átomos situados á distancias infinitamente grandes respecto á sus dimensiones, y ejerciendo unos sobre otros acciones repulsivas, según las líneas que los unen dos á dos; estas acciones se supone que son proporcionales á las masas y funciones de las distancias expresadas.

Así, pues, en la hipótesis á que nos referimos, los átomos hacen el papel de verdaderos puntos matemáticos; según ciertos autores lo son en efecto y representan centros de fuerzas sin dimensiones finitas; según otros deben considerarse como sólidos indivisibles de hecho, pero ocupando espacios realmente finitos, y de todo punto impenetrables. La primera hipótesis, verdaderamente espiritualista, es la más completa negación de la materia según los sentidos creen percibirla; la segunda conduce á la teoría atómica; mas para nuestro objeto es inútil insistir sobre este punto de vista puramente metafísico. Nos basta suponer: 1.º, que si los átomos tienen dimensiones, son éstas despreciables respecto á las distancias; 2.º, que entre unas y otros existen acciones repulsivas.

100. ÁTOMOS PONDERABLES. — Los cuerpos llamados *ponderables* se suponen formados también de átomos infinitamente pequeños y ejerciendo unos sobre otros acciones á distancia, y para explicar varios fenómenos de la refracción ha sido necesario admitir que cada átomo de materia ponderable atrae á los átomos etéreos que le rodean, agrupándolos á su alrededor y ciñéndose de una atmósfera de éter, cuya densidad media es superior á la del éter en el vacío, y cuya densidad efectiva decrece rápidamente desde dicho centro al exterior.

En la fig. 14, m y m' son dos átomos de materia ponderable, y e , e' las atmósferas etéreas que los rodean.

La acción total de m sobre m' puede considerarse como la resultante de dos fuerzas; una atractiva, que procede de las masas m , m' y de la forma $\frac{m m' a}{r^p}$, siendo r la distancia mm' y a la atracción de dos masas iguales á la unidad y situadas á la unidad de distancia; otra repulsiva, originada por las reacciones neutras de las dos atmósferas e , e' , y expresada por $\frac{n n' b}{r^q}$, siendo n , n' las masas de ambas atmósferas, y b otra constante análoga á la constante a . Quizá pudiera aún tenerse en cuenta en el valor de la fuerza atractiva la acción de m sobre e' y de m' sobre e ; pero aún cuando la distancia $m m'$ hiciera posible esta acción, en nada se alteraría lo que vamos á exponer.

En resumen, la acción resultante de ambos sistemas será

$$\varphi = \frac{m m' a}{r^p} - \frac{n n' b}{r^q} = \frac{m m' a}{r^p} \left(1 - \frac{n n'}{m m'} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{r^{q-p}} \right)$$

y representando

$$\frac{n n'}{m m'} \frac{b}{a} \text{ por } r_0^{q-p}$$

tendremos

$$\varphi = \frac{m m' a}{r^p} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{q-p} \right)$$

Si la distancia r es igual á r_0 , φ es nula y los átomos están en equilibrio.

Si $r > r_0$, φ es positiva y la fuerza es de atracción.

Si, finalmente, $r < r_0$, φ resulta negativa y los sistemas $m e$, $m' e'$ se repelen.

101. MOLÉCULAS. — Admitamos ahora que varios átomos, cada uno con su respectiva atmósfera, forman un grupo más ó ménos regular y más ó ménos estable; este grupo será lo que llamaremos una molécula. La molécula de este modo formada podrá ser invariable de forma si hay equilibrio entre todos sus elementos, ó podrán éstos, y éste será el caso más general, describir trayectorias infinitamente pequeñas al rededor de una posición media, en cuyo caso la molécula se hallará en perpétuo estado de vibración.

Supongamos, para fijar las ideas, que se reúnen tres átomos ponderables m , m' , m'' (fig. 15) rodeadas de sus respectivas atmósferas etéreas sobre los tres vértices del triángulo $m m' m''$ como posición de equilibrio; y que obedeciendo á sus acciones recíprocas y á las condiciones iniciales de la agrupación, estos tres átomos entran describiendo las pequeñas trayectorias $a b$, $a' b'$, $a'' b''$. La molécula no será un sólido invariable; se hallará, por decirlo así, en palpitación continua, pero esta palpitación se realizará al rededor de una forma media $m m' m''$, que será la del triángulo fundamental, y separándose infinitamente poco de dicha forma, á la que podremos siempre referirnos para todos aquellos fenómenos físicos en que tome parte la molécula que nos ocupa.

Análogamente, supongamos que cuatro átomos M , M' , M'' , M''' con sus respectivas atmósferas etéreas se agrupan en los vértices de un cuadrilátero $M M' M'' M'''$ como posición de equilibrio; es decir, que las acciones mutuas sean tales que para cada átomo se equilibren. Admitamos, además, que, ya por velocidades iniciales comunicadas, ya por no ocupar en el instante de la agrupación cada átomo la posición de equilibrio correspondiente, oscilan éstos al rededor de la posición media describiendo trayectorias infinitamente pequeñas $A B$, $A' B'$, $A'' B''$, $A''' B'''$. Tendremos de este modo una molécula análoga á la $m m' m''$.

Ahora bien, si se hallan en presencia las molé-

culas o y O en general, y salvo casos particulares, la acción mutua no se reducirá á una atracción ó repulsión, sino que se compondrá de una fuerza atractiva ó repulsiva y de un par; así la acción de O sobre o será la fuerza f aplicada al centro de gravedad o de la molécula triangular y al par $l l' \times g$, que tenderá á hacerla girar en el sentido que indica la flecha. Y del mismo modo la acción de o sobre O se compondrá de $F = f$ y del par $L L' \times G = l l' \times g$.

Resulta de aquí que las moléculas tenderán á separarse ó á acercarse, y que á la vez girarán ú oscilarán al rededor de sus centros de gravedad.

102. CONSTITUCION DE LOS CUERPOS. — Las consideraciones anteriores sirven para explicar la constitución de los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.

SÓLIDOS. Es probable que los cuerpos sólidos estén formados de moléculas, compuestos á su vez de un gran número de átomos, y que las dimensiones de estas moléculas no sean bastante pequeñas por relación á sus distancias mutuas para suponerlas reconcentradas en sus centros de gravedad; de modo que las formas de estas moléculas tendrán influencia en sus acciones mutuas, y que éstas, segun lo dicho, se compondrán de dos fuerzas iguales y contrarias, aplicadas á los centros de gravedad respectiva, y de dos pares iguales y opuestos tambien.

En esta hipótesis, en el interior de un cuerpo sólido tendremos los siguientes movimientos.

1.º Movimiento vibratorio de traslación de la molécula entera al rededor de una posición media.

Es decir que su centro de gravedad como el de un cuerpo sólido vibrará al rededor de un punto fijo, segun una trayectoria infinitamente pequeña.

2.º Movimiento vibratorio de rotación de la molécula entera como un cuerpo sólido al rededor de su centro de gravedad. Éste será en general, no un movimiento de rotación continuo sino una oscilación pendular.

3.º Movimiento vibratorio de los átomos de cada molécula con sus atmósferas.

4.º Movimiento vibratorio de las atmósferas etéreas independiente de los átomos ponderables que rodean.

Todos estos movimientos, siendo infinitamente pequeños y verificándose al rededor de posiciones medias, no alteran la forma general del sólido.

El segundo de los movimientos descritos tiende á orientar las moléculas unas respecto á otras, y puede servir de fundamento para explicar la cristalización.

Así, pues, tres condiciones caracterizan el estado sólido.

1.º Distancias entre las moléculas comparables á las dimensiones de estas, y fuerzas moleculares poderosas que sujetan cada molécula, no permitiéndola separarse sino infinitamente poco de su posición de equilibrio.

2.º Movimiento pendular de las moléculas, que tiende á orientarlas.

3.º Trayectorias infinitamente pequeñas en la oscilación de cada molécula.

103. LÍQUIDOS.—El estado líquido es un intermedio entre el estado sólido y el gaseoso; las moléculas no tienen posiciones de equilibrio perfectamente determinadas, como en los sólidos, al rededor de las cuales puedan vibrar. Por una parte las distancias entre las moléculas han aumentado y las fuerzas atractivas ó repulsivas, grandemente debilitadas, no tienen intensidad bastante para sujetar á cada molécula al rededor de su posición de equilibrio; por otra parte, y á causa de este mismo aumento de distancia, la forma de la molécula influye poco en su orientación; el movimiento oscilatorio se convierte en movimiento de rotación continuo, y cada vez la forma de la molécula es ménos decisiva. Sin embargo, la velocidad de traslación de cada molécula no es bastante grande para separarla por completo de las demás; las fuerzas moleculares aún ejercen su acción, las trayectorias son curvilíneas; y si por acaso una molécula se separa de un grupo molecular, ántes de que continúe su camino rectilíneo con la velocidad adquirida, viene á otro grupo molecular, que la retiene.

Así, pues, tres condiciones caracterizan el estado líquido.

1.ª Aumento de distancia entre las moléculas, y atenuación de las fuerzas moleculares.

2.ª Rotación continua de las moléculas en vez de oscilaciones pendulares que tiendan á orientarlas.

3.ª Trayectorias curvilíneas comparables en dimensiones á las de las moléculas.

104. GASES.—Si las distancias de las moléculas aumentan tanto, que salen de sus mutuas esferas de atracción, las fuerzas moleculares desaparecen, y cada molécula partirá como un cuerpo sólido, describiendo su centro de gravedad una línea recta con movimiento uniforme. A la vez continuará el movimiento de rotación continuo de cada molécula al rededor de su centro de gravedad.

Resulta de lo dicho que el estado gaseoso está caracterizado:

1.º Por la anulación completa de las fuerzas moleculares y por el movimiento rectilíneo y uniforme de cada molécula.

2.º Por la rotación continua de las moléculas, que tiende más y más á anular la influencia de la fuerza.

3.º Por las trayectorias rectilíneas de las moléculas.

Y obsérvese que la expansión de los gases en esta hipótesis no procede de fuerzas repulsivas, sino de la tendencia de las moléculas á escapar de la masa en línea recta y con una cierta velocidad adquirida en el momento último en que cesó la influencia de la fuerza molecular.

No es, pues, la fuerza repulsiva, es la velocidad rectilínea y uniforme de traslación la que explica la fuerza de dilatación de los gases.

105. CALOR.—Tenemos, pues, en todos los cuerpos el movimiento de las moléculas, sea de traslación, sea de rotación, el movimiento de los átomos dentro de cada molécula, y el movimiento del éter, que forma las atmósferas de los átomos. Este conjunto de movimientos, en la mayor parte vibratorios, es lo que constituye el *calor* en la hipótesis que venimos explicando.

Las vibraciones caloríficas, produciendo un cambio en la constitución de los cuerpos y tendiendo á aumentar en volumen, pueden transformarse en acciones exteriores, es decir, pueden crear *trabajo*; y reciprocamente, las acciones exteriores, ó sea el *trabajo* de las fuerzas exteriores, haciendo nacer vibraciones en el interior de los cuerpos engendran efectos caloríficos.

La *termodinámica* es el estudio de las relaciones que existen entre los fenómenos caloríficos, sus causas y sus efectos; y el calor, considerado como movimiento vibratorio, entra en las leyes generales de mecánica.

¿Pero, con cuál de los elementos que constituyen el estado de agitación interna de los cuerpos se relaciona directamente como cantidad el calor? Ya lo hemos indicado varias veces, y éste es uno de los grandes principios de la física moderna. El calor no es otra cosa que la *fuerza viva* de todos esos movimientos interiores, á que venimos refiriéndonos.

106. Imaginemos, para simplificar la explicación, un cuerpo cualquiera, sujeto tan sólo á fuerzas interiores, en cuyo caso su centro de gravedad permanecerá invariable.

Sea m la masa de uno de los puntos materiales que constituyen el cuerpo, y v su velocidad en cualquier instante; $\frac{1}{2} m v^2$ será en ese mismo instante

la fuerza viva de dicho punto y

$$\Sigma \frac{m v^2}{2}$$

la fuerza viva total, si la suma Σ se extiende á todos los puntos materiales que forman el cuerpo de que se trata.

Entre dos instantes, que representaremos por los subíndices 1 y 2, la variación de fuerza viva será

$$\Sigma \frac{m v_2^2}{2} - \Sigma \frac{m v_1^2}{2}$$

y aplicando el teorema general de las fuerzas vivas y de los trabajos

$$\Sigma \frac{m v_2^2}{2} - \Sigma \frac{m v_1^2}{2} = \Sigma \text{ Trabajos fuerzas interiores,}$$

ó abreviadamente

$$\Sigma \frac{m v_2^2}{2} - \Sigma \frac{m v_1^2}{2} = \Sigma_1 \text{ T. F. int.}$$

en cuyo segundo miembro la Σ se refiere á todos los trabajos desarrollados entre los instantes 1 y 2,

por las fuerzas interiores, que son las únicas que actúan sobre el sistema.

Propongámonos determinar la forma de este segundo miembro. Las fuerzas interiores están reducidas á las acciones mutuas de cada dos puntos m, m' , cuya distancia representaremos por r ; y estas acciones consistirán en dos fuerzas iguales y opuestas $m m' \varphi(r)$ aplicadas una al primer punto y otra al segundo, y dirigidas según la línea de union. La función $\varphi(r)$ será positiva ó negativa, según que la fuerza sea atractiva ó repulsiva.

Sean x, y, z las coordenadas del punto m por relación á ejes fijos, y x', y', z' las del punto m' ; las componentes de la fuerza aplicada á m serán:

$$X = m m' \varphi(r) \frac{x' - x}{r};$$

$$Y = m m' \varphi(r) \frac{y' - y}{r};$$

$$Z = m m' \varphi(r) \frac{z' - z}{r};$$

y el trabajo elemental de estas fuerzas en el movimiento absoluto del sistema

$$X dx + Y dy + Z dz = mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x' - x) dx + (y' - y) dy + (z' - z) dz].$$

Del mismo modo el trabajo elemental de la fuerza aplicada á m' será

$$-(X dx' + Y dy' + Z dz') = -mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x' - x) dx' + (y' - y) dy' + (z' - z) dz'].$$

Y el trabajo elemental de la acción mutua de los dos puntos se obtendrá sumando ambos trabajos, con lo que obtendremos

$$-mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x' - x) d(x' - x) + (y' - y) d(y' - y) + (z' - z) d(z' - z)],$$

pero

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

y diferenciando

$$r dr = (x' - x) d(x' - x) + (y' - y) d(y' - y) + (z' - z) d(z' - z).$$

de modo que sustituyéndose la supresión precedente hallaremos:

$$\text{Trabajo elemental de la acción mutua de } mm' = -mm' \frac{\varphi(r)}{r} r dr = -mm' \varphi(r) dr,$$

y para la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas interiores

$$\text{T. elem. F. } m t = -\Sigma m m' \varphi(r) dr$$

expresión que poniendo para simplificar

$$\int -\varphi(r) dr = \Psi(r) \text{ de donde } -\varphi(r) dr = d\Psi(r)$$

se deducirá

$$\text{T. elem. F. } m t = d \Sigma m m' \Psi(r)$$

Como esta ecuación no contiene más que las distancias mutuas de cada dos puntos, es evidente que aún cuando el cuerpo estuviese sometido á fuerzas exteriores, aún cuando obedeciese á cualquier movimiento absoluto, y fueren cuales quisieren los ejes á que refiriéramos uno de sus movimientos relativos, el trabajo elemental de las

fuerzas interiores siempre será el mismo. Observación importante de que haremos uso en lo sucesivo.

107. Puesto que la distancia r entre cada dos puntos del cuerpo es función de sus coordenadas (x, y, z) (x', y', z') , es evidente que $mm' \Psi(r)$

será función de las coordenadas de todos los puntos del sistema, y no dependerá más que de las posiciones relativas de estos puntos. Así, pues
T. elem. F. int = $d f(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \dots)$

J. ECHEGARAY.

TEORÍA

DEL

CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(Continuación.)

62. *Posiciones diversas de la parábola de los momentos.* Ya sabemos que lo que hace variar los casos de distribución de la sobre-carga para la determinación de las líneas envolventes es la situación de las parábolas de la carga aislada y permanente respecto de los puntos P y Q (figura 5.^a), y como tenemos todos los elementos necesarios para esta discusión, vamos a indicarla ligeramente para la segunda de aquellas curvas, empezando por los tramos de orden par.

En primer lugar situaremos los cinco puntos M, P, T, Q y N del tramo (figura 14), fijaremos al punto T', común a todos, las parábolas, y observaremos que siendo negativa su ordenada y positiva siempre la de los apoyos de orden par, resulta que la curva que los una cortará necesariamente a la línea M N, y por consiguiente en las vigas de número par de tramos no es posible que las intersecciones de las parábolas de la carga permanente con el eje de las x sean imaginarias.

La ordenada del punto P, fórmula (68), empieza siendo negativa para $\delta = 0$, aumenta después en valor absoluto, pero conservando el mismo signo, y luego decrece hasta volver a su posición inicial para el valor $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En este mismo intervalo, la del punto Q (69 bis) empieza también siendo negativa, pero pasa a ser positiva, recuperando también su valor primitivo para aquel valor de δ ; de manera que la parábola toma las posiciones 1, 2, 3 y 4, confundiendo esta última con la primera, y a medida que δ aumente desde $\sqrt{\frac{2}{3}}$ hasta ∞ , continúa el eje de la parábola moviéndose siempre hacia la derecha, y toma las posiciones 5, 6 y 7, de las que ésta corresponde a un valor de $\delta > 1$, y luego las 8 y 9, siendo esta última la vertical que pasa por el punto T.

La figura 15 nos representa las diversas parábolas de la carga permanente para los tramos de orden impar, y excusamos repetir la discusión correspondiente, por fundarla en iguales raciocinios a los anteriores. Tan sólo añadiremos que para que pudieran distinguirse con alguna claridad estas figuras, se han exagerado también la ordenada de T y la distancia T Q.

63. *Determinación de las líneas envolventes.* Para el caso 1.^o ó 2.^o de la distribución de la sobre-carga, que realmente es el único que es preciso estudiar, aplicaremos, en virtud de lo demostrado en el número 58 para PP.^{1.} las fórmulas (76), según que k sea par ó impar, y para QQ.^{1.} la (77), pero tomándolas al contrario; es decir, según que k sea impar ó par.

Vamos también a determinar los valores de los momentos de flexión y esfuerzos trasversales en los apoyos a fin de completar este estudio, aunque repetimos que no es necesario. Empezaremos por el caso 1.^o, siguiendo la misma marcha que en el número 42, y observando que cuando n es par $\alpha_{n-k} + \alpha_{k-2} = 2 E_{m-k} \alpha_{m-1}$ y $D = 2 \alpha_{m-1} \Sigma_{m-1}$, según se deduce de la segunda relación del grupo (41) y de la 1.^a del (28), la expresión general del momento de flexión en el apoyo k , para el caso 1.^o de la repartición de la sobre-carga, es

$$M_k^{1.0} = \frac{1}{2} P_k + \left(\frac{(\delta^3 - 1) E_{m-k}}{8 \Sigma_{m-1}} + \frac{\alpha_{n-k} \alpha_{k-2}}{4 D} \right) p l^2$$

y $M_k^{4.0}$ sólo difiere de este valor en el signo de los dos últimos términos.