TEORÍA

DEL

CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Continuacion.*)

§ 2.° Discusion general de las líneas envolventes de los momentos y esfuerzos trasversales.

51. *Resúmen de las consideraciones anteriores relativas á este punto.* En el número 8 demostramos que todos los casos de reparticion de la sobrecarga podian reducirse á cinco distintos para el estudio de los máximos momentos, lo cual nos conducia á la division de cada tramo en igual número de partes, pero como en cada trozo de ésta habia sobrecargas que daban momentos positivos y otros que los daban negativos, resultaba un total de diez expresiones, y era preciso examinar en cada punto cuáles de ambos valores eran mayores en valor absoluto, despues de combinarlos con los momentos producidos por la carga permanente de la viga. Para escoger de los diez casos, los puramente necesarios, demostramos que bastaba trazar en cada tramo la parábola debida á la carga permanente, ó fijar, por lo ménos los puntos de interseccion de la misma con el eje de las x, añadimos que en cada punto del tramo deberian tomarse los momentos positivos ó negativos debidos á la sobrecarga, segun el signo de la ordenada del mismo punto para la carga permanente, de manera que si esta parábola corta al eje de las x en dos puntos de la longitud del tramo, en el intervalo de ambas intersecciones habrá que tomar los momentos negativos y positivos en el resto; si no hay más que un punto de interseccion, los momentos serán, en los tramos de órden par, positivos en la parte del mismo signo de la parábola de la carga permanente. Ya indicamos la marcha que en general debe seguirse para obtener los valores máximos de los momentos y esfuerzos trasversales y vamos á estudiar detalladamente el caso de las vigas simétricas.

52. *Línea envolvente de los momentos para un tramo de órden par.* Vemos, pues, que el número de casos distintos que habrá que considerar en cada tramo, depende de la situacion respectiva de las dos parábolas de la carga aislada y de la carga permanente, de manera, que habiendo estudiado por separado en los capítulos II y III todas las alteraciones de posicion que sufre cada una de estas curvas, y que están representadas para la 2.ª en las figuras 8.ª y 9.ª, nos resta compararlas simultáneamente.

Para esto, seguirémos la misma marcha que empleamos en la discusion para el trazado de aquellas curvas; es decir, que compararémos las ordenadas de las mismas en los puntos **M**, **P**, **Q**, **T** y **N**. Empezando por el apoyo M la diferencia de los momentos de la carga permanente y la carga aislada, cuando el peso por metro lineal es el mismo en ambos casos (puesto que como vimos en el número 9, es inútil, para hallar las intersecciones de estas parábolas con el eje de las x, tener en cuenta el factor p), está dada por

$$\frac{\alpha_{n-k}\left(\delta^2-\beta_1+\beta_2-\cdots\cdots+\beta_{k-2}\right)-\alpha_{k-2}\left(\beta_{n-k-1}-\beta_{n-k-2}\cdots\cdots-\beta_1+\delta^2\right)}{4\,D}\,p\,l^2$$

$$=\frac{\left(\alpha_{n-k}-\alpha_{k-2}\right)\delta^2}{4\,D}\,p\,l^2+\frac{\alpha_{n-k}\left(\Sigma_{k-2}-\Sigma_0\right)-\alpha_{k-2}\left(\Sigma_{n-k-1}-\Sigma_0\right)}{24\,D}\,p\,l^2>o$$

porque el primer término es siempre positivo, y tambien el segundo, por ser $\alpha_{n-k}>\Sigma_{n-k-1}-\Sigma_0$ y $\Sigma_{k-2}-\Sigma_0>\alpha_{k-2}$, por consiguiente, la ordenada de la parábola de la carga aislada es siempre inferior que la de la carga permanente en los apoyos de órden par.

Se demuestra tambien muy fácilmente por las fórmulas deducidas en el número 37, que en los puntos P y Q, pasa siempre por debajo la primera de aquellas curvas respecto de la segunda; pero no hay ninguna necesidad de probarlo, porque vamos á ver que sucede lo mismo en T, y por consiguiente, claro está que siendo iguales ambas parábolas, si en M y T queda una de ellas debajo de la otra, deberá suceder lo mismo en los puntos intermedios.

La distancia $MT = \frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} l$ segun vimos en el número 59,

pero $\frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} = \frac{\alpha_{n-k} - \alpha_{k-2}}{\gamma_{n-k} - \gamma_{n-k-1}}$

segun se deduce de las relaciones (37) y (40).

La ordenada en un punto cualquiera de la parábola de la carga aislada, está dada, número 7, sea par ó impar el tramo que se considere por

$$M_k(x) = \frac{\alpha_{k-2}\beta_{n-k}}{4D} p l^2 - \frac{\gamma_{k-1}\beta_{n-k}}{4D} p l x - \frac{1}{2} p x \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

pero

$$\frac{\beta_{n-k}}{4D}\left(\alpha_{k-2} - \gamma_{k-1}\frac{\alpha_{n-k} - \alpha_{k-2}}{\gamma_{n-k} - \gamma_{k-1}}\right) = -\frac{\beta_{n-k}}{4(\gamma_{n-k} - \gamma_{k-1})} = -\frac{\beta_{n-k}}{24\beta_m A_{m-k}}$$

$$M_k(x) = -\frac{\beta_{n-k}}{24\beta_m A_{m-k}} p l^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}}\left(\frac{1}{2} - \frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}}\right) p l^2 =$$

$$= -\frac{\beta_{n-k}}{24\beta_m A_{m-k}} p l^2 + \frac{1}{2}\frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}} \times \frac{E_{m-k}}{6A_{m-k}} p l^2 =$$

$$= \frac{p l^2}{24 A_{m-k}}\left(-\frac{\beta_{n-k}}{\beta_m} + \frac{C_{m-k+1} E_{m-k}}{3A_{m-k}}\right)$$

pero $\beta_{n-k} = A_{m-k+1}\beta_m - A_{m-k}\beta_{m-1}$ en virtud de la relacion (35), ó lo que es lo mismo,

$$\frac{\beta_{n-k}}{\beta_m} = A_{m-k+1} - A_{m-k}\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m}$$

y

$$\frac{C_{m-k+1} E_{m-k}}{3A_{m-k}} = B_{m-k+1} + \frac{1}{3A_{m-k}} \quad \text{por la (53)}$$

y por consiguiente, sustituyendo la ordenada T t (*figura* 5.ª), será

$$T t = -\frac{p l^2}{24}\left(\frac{2\alpha_{m-1}}{\beta_m} - \frac{1}{3A^2_{m-k}}\right) < o \qquad (77)$$

porque el primer término es mucho mayor que el segundo; de manera que siendo siempre positiva la ordenada del punto T para la parábola de la carga permanente, y negativa, segun acabamos de demostrar, la de la carga aislada, queda demostrado que esta curva pasará siempre por debajo de la otra, segun dijimos anteriormente.

Observemos, ademas, que el segundo término de T t, $\frac{1}{72 A^2_{m-k}} p l^2$ es precisamente igual á la ordenada constante T T′ de la carga permanente; luego la diferencia entre las de ambas curvas, ó sea la parte de la vertical interceptada entre las mismas, es $-\frac{1}{12}\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_m} p l^2$, cantidad independiente de k, é igual, por lo tanto en todos los tramos para cada valor de δ, y áun sensiblemente constante á causa de la escasa influencia que tiene esta variable en la fraccion $\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_m}$ como lo probamos para una fraccion análoga en el número 28.

Esta propiedad nos sirve para hallar áun más fácilmente que por la del número 29, un punto de la parábola de la carga aislada cuando se conoce el punto fijo T′ de la correspondiente á la carga permanente, y vice-versa. Ademas, si observamos que el término $\frac{1}{72 A^2_{m-k}}$ es despreciable, sobre todo para los tramos algo distantes del centro, resulta que si se traza una recta paralela al eje de las x á la distancia $-\frac{1}{12}\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_m} p l^2$, y se hallan las intersecciones con las verticales tiradas por los puntos T, los que así se determinen pertenecerán á las diversas curvas de la carga aislada, con muy ligeros errores.

Hemos demostrado ya que en los puntos M y T, y por consiguiente, en el intervalo M T, la parábola de la carga aislada pasa por debajo de la debida á la carga permanente, y nos queda que examinar lo que sucede en la parte T N. Si comparamos las ordenadas de una y otra curva en el punto N, se observa que desde $\delta = 0$ hasta $\delta = 1$ es mayor la de la carga permanente que la de la aislada; pero como ésta se conserva siempre positiva hasta $\delta = \infty$, miéntras que la otra pasa por cero y llega en el límite á $-\infty$, claro está que habrá un valor de $\delta > 1$ que hará iguales ambas ordenadas. Desde $\delta = 0$ hasta aquel valor de δ, la parábola de la carga permanente pasará por encima de la de la carga aislada en toda la longitud del tramo, y continuando luégo hasta $\delta = \infty$, se cortarán ambas curvas, primero en la ordenada del punto N, y luégo en el intervalo T N.

Vamos ahora á examinar las posiciones distintas que ocuparán estas parábolas, para lo cual habrá que tener presentes las discusiones hechas en los dos capítulos anteriores. Desde $\delta = 0$ hasta $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ aquellas curvas se hallarán en la situacion indicada en la *figura* 11.ª, de manera que habrá cuatro casos positivos y tres negativos, si bien en realidad no serán más que cinco casos distintos de los seis que en general hay que estudiar (segun el número 8), y que corresponden á los diversos números señalados en la misma figura, contiguos á los trozos marcados con líneas gruesas, que determinan la línea envolvente. A medida que δ aumenta, y para valores de esta variable comprendidos entre $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\delta = \sqrt{\frac{3}{4}}$, vimos en el número 41 que la parábola de la carga permanente pasaba sucesivamente por las posiciones 4 y 5 de la *figura* 8.ª Para la 1.ª de éstas, los siete casos de la *figura* 11.ª se reducen á seis por anularse el trozo Q V; para posiciones intermedias entre la 4 y 5 habrá cinco casos positivos y dos negativos, como se han representado en la *figura* 12.ª, y para la 5, ó sea cuando la parábola superior pase por P, se reducirán tambien á seis casos, por anularse el primero de los dos negativos.

A medida que δ aumenta, hasta que sea tangente á la recta M N la parábola de la carga permanente, que será siempre para $\delta > 1$, tendrémos, *figura* 13.ª, seis casos positivos y uno negativo. Para valores mayores de δ, y hasta tanto que el momento del apoyo N, que es de órden par, se anule, habrá, primero seis, y despues cinco casos positivos. Desde aquel valor de δ hasta $\delta = \infty$, la parábola de la carga permanente sólo corta al eje de las x en un punto de la longitud del tramo, siendo positivos los momentos de la parte comprendida entre M y esta interseccion, y negativos los restantes. Pudiéramos trazar igualmente las figuras correspondientes á estos valores de δ, pero lo consideramos excusado, una vez que no se aplican en la práctica.

53. *Línea envolvente de los momentos para un tramo de órden impar.* Esta discusion es enteramente análoga á la precedente, y para ella conocemos en primer lugar las diversas posiciones de la parábola de la carga permanente, representadas en la *figura* 9.ª, y ademas la situacion respectiva de los puntos de esta curva y los de la carga aislada para las extremidades del tramo y el punto T, y así sólo nos que-

da hacer la misma comparacion en los puntos P y Q. Para esto basta observar que desde $\delta = 0$ hasta $\delta = 1$, la ordenada del punto M es siempre mayor para la primera curva que para la segunda; y como sabemos que cualquiera que sea el valor de δ, pasa tambien en T por encima la parábola de la carga permanente, deberá suceder lo mismo en P y Q; pero como para valores mayores de δ se igualarán ambas ordenadas en M, y despues pasará por debajo la curva de la carga permanente, cuya ordenada decrece indefinidamente, claro está que en los puntos P y Q sucederá lo mismo, es decir; que llegarán á ser menores las ordenadas de la carga aislada.

Consideramos completamente inútil extendernos sobre esta discusion, en la que no nos quedaria más que repetir los razonamientos del número anterior; y como los casos que deben considerarse para hallar la línea envolvente de los momentos dependen solamente de la posicion respectiva de los puntos P y Q, y las intersecciones de las dos parábolas con el eje de las x, nos limitarémos á decir que para $\delta = 0$, la línea envolvente tendrá la misma disposicion que en la figura 11.ª; á medida que δ aumenta se repetirán las figuras 12 y 13, para presentarse nuevamente las 12 y 11, siendo esta última la que corresponderá, en los tramos impares que estamos considerando, á $\delta = 1$.

54. *Envolvente de los esfuerzos trasversales.* Ya vimos en el capítulo I, número 12, que esta línea se compone en general de tres trozos, y que su disposicion depende de la situacion respectiva de los puntos de interseccion con el eje de las x, de las rectas debidas á la carga aislada y á la carga permanente (*figura* 6.ª). Por consiguiente, el estudio que debemos hacer es el de las variaciones que experimenta la distancia OO′ á medida que δ aumenta.

Esta longitud está determinada, como sabemos, por la diferencia de los esfuerzos trasversales en el punto M de la carga permanente y la aislada que estará dada aplicando las fórmulas (58) y (65) por

$$OO' = \left[\frac{\pm (3\delta^3 - 2\delta) A_{m-k}}{2\gamma_m} + \frac{(4\delta^2 - 3) A_{n-2k}}{4\beta_m \gamma_m} \right] l$$

segun que k sea par ó impar.

En los tramos de órden par, y para $\delta = 0$, esta expresion toma un valor negativo, lo cual indica que la línea envolvente tendrá la disposicion representada en la figura 6.ª La diferencia se conservará con el mismo signo hasta un valor de δ comprendido entre $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt{\frac{3}{4}}$ para el que se confundirán los puntos O y O′, y despues hasta $\delta = \infty$, será siempre positiva y aumentará indefinidamente la distancia entre ambas intersecciones, que ocuparán la situacion contraria de la figura 6.ª

Para los tramos de órden impar empieza tambien siendo negativa aquella cantidad para $\delta = 0$, se anula dos veces entre este valor y $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ tomando valores positivos en el intermedio de ambos, y más adelante se conserva siempre negativa.

Con esto queda terminado el estudio de todos los elementos necesarios para resolver el problema del cálculo de las vigas rectas, y vamos á resumir en el párrafo inmediato las consideraciones relativas al procedimiento práctico que debe seguirse para trazar las líneas envolventes y determinacion de los espesores de las vigas.

§ 3.° Método que debe seguirse para el cálculo de las vigas rectas.

Supondrémos, como en lo que antecede, que se trata de una viga simétrica de tramos intermedios iguales, siendo impar su número, sometida á una carga accidental p por metro lineal, que obrará sobre los diversos tramos de la viga, en todas las combinaciones imaginables de reparticion de la sobrecarga en tramos completos, y ademas á la carga permanente p' repartida uniformemente en toda la longitud de la viga, y vamos á resumir cuanto antecede indicando el método que debe seguirse para la resolucion del problema, siendo, como siempre, n el número de tramos, l la longitud de los intermedios, y $l\,d$ la de los extremos.

55. *Division de cada tramo en diversos trozos.* Ya sabemos que para hallar los máximos momentos en un tramo cualquiera hay que dividirlo en 5, 6 ó 7 secciones, en cada una de las cuales correspon-

den los mayores valores del momento de flexion á los mismos casos de reparticion de la sobrecarga; de manera que lo primero que debe hacerse para proceder al cálculo de las vigas rectas es la division del eje M N en diversos trozos, que corresponderán á porciones distintas de la línea envolvente, como se ve en las figuras 11, 12 y 13.

Para esto, empezarémos por formar las series de los números α y γ por las fórmulas (45) y dando á δ el valor que le corresponda, determinarémos los puntos P y Q (*figura* 5.ª), por las distancias

$$M P = \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l \text{ y } M Q = \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l.$$

Los demas puntos de separacion de los trozos R, S, U y V son, como sabemos, los de interseccion de las parábolas debidas á la carga aislada y á la carga permanente con el eje de las x, y pueden determinarse por cálculo ó por construcciones gráficas. Para emplear el primer método, aplicarémos la fórmula (16), sustituyendo, en vez de los momentos y esfuerzos trasversales de los apoyos, los valores determinados en los capítulos II y III; pero es más sencillo el procedimiento gráfico. Este consiste, para la carga aislada, en la construccion indicada en la figura 2.ª, que en nuestro concepto determinará con bastante exactitud los puntos R y S; pero si se quiere, se pueden obtener por cálculo las ordenadas P p y Q q por las fórmulas del número 26, ó lo que es preferible por las (70) del número 37, que son más sencillas. En ambos valores prescindirémos del factor comun $p\,l^2$, y una vez fijados los puntos p y q, se trazará la parábola R $p\,q$ S (*figura* 5.ª), aplicando la plantilla construida con la ecuacion $y = \frac{1}{2} x^2$ colocada de manera que su eje sea vertical.

Para la carga permanente se señalará el punto fijo T′, cuya abscisa es $M T = \frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} l$, y su ordenada $T T' = \frac{1}{72 A^2_{m-k}} p\, l^2$ (71), que será en general casi nula, y ademas determinará la ordenada PP′ por la fórmula (68) ó (69 bis), y conocidos los puntos P′ y T′, se trazará con la misma plantilla la parábola U P′ V T′ de los momentos debidos á la carga permanente. Ademas recordarémos que la distancia $t\, T' = - \frac{\alpha_{m-1}}{12 \beta_m} p\, l^2$ fórmula (77), es constante en todos los tramos de la viga, lo cual nos puede servir para hallar el punto t en vez del q de la parábola de la carga aislada.

Una vez dividido cada tramo en trozos, observarémos si dentro de la longitud del mismo la parábola de la carga permanente tiene dos, una ó ninguna interseccion con el eje de las x. En el primer caso los máximos momentos serán negativos en el intervalo de ambos puntos, y positivos en el resto. En el 2.° serán para los tramos de órden par, negativos á la derecha y positivos á la izquierda del punto de interseccion, y viceversa en los de órden impar; y en el 3.°, que sólo podrá verificarse en los tramos pares, serán todos los mayores momentos positivos. Inmediatamente se procederá á fijar en cada uno de los trozos en que se ha dividido el tramo, el número que represente aquel de los seis casos distintos de la reparticion de la sobrecarga correspondiente á cada uno de ellos. Para esto bastará examinar la figura 3.ª, que carece de las intersecciones U y V de la curva de la carga permanente, y pasando despues á la figura 5.ª, será muy fácil distinguir las partes en que debe tomarse el contorno mixtilíneo positivo ó negativo, segun las indicaciones anteriores.

56. *Determinacion de los máximos valores de los momentos de flexion.* Una vez dividido el tramo en trozos, y numerados éstos, se procederá á hallar los momentos de flexion, debidos á la sobrecarga, que podrán reunirse desde luégo con los correspondientes á la carga permanente, ó construirse por separado las figuras relativas á uno y otro caso. Limitándonos por ahora á los relativos á la sobrecarga, recordarémos que las líneas envolventes correspondientes á los casos 1, 5 y 6, son tambien parábolas determinadas por la ecuacion $y = \frac{1}{2} p\, x^2$, suponiendo cambiados los ejes coordenados de manera, que el orígen esté sucesivamente en el vértice de cada una de ellas, y áun puede simplificarse aquella expresion dejándola en la forma $y = \frac{1}{2} x^2$, prescindiendo, como anteriormente, para el trazado de las curvas

del factor comun p. Los casos de reparticion de la carga designados por los números 2, 3 y 4, corresponden á líneas rectas.

En el párrafo 1.° de este capítulo hemos determinado las ecuaciones de estas líneas, y por consiguiente, podrán hallarse sus ordenadas por medio del cálculo; pero es mucho más sencillo trazarlas gráficamente, averiguando de antemano la posicion de dos puntos de cada una de ellas, despues de lo cual se trazarán las diversas líneas envolventes de los momentos debidos á la sobrecarga, sin más que unirlos por la plantilla de eje vertical, y cuya ecuacion es, segun hemos dicho, $y = \frac{1}{2} x^2$, ó simplemente por líneas rectas.

Para fijar dos puntos de cada una de estas líneas, hemos visto en lo que antecede, que en vez de calcular las ordenadas de las mismas en los apoyos, es preferible hallar las de los puntos P Q, porque hemos demostrado que estan dadas por expresiones más sencillas.

Para la division del tramo en trozos, suponemos ya trazadas en cada tramo las parábolas de la carga aislada y la permanente, y determinadas por cálculo las ordenadas de los puntos P y Q para la primera de aquellas curvas, y vamos á recordar cómo se hallan las líneas de los momentos debidos á las diversas combinaciones de la sobrecarga.

Para la parábola del caso 1.°, la ordenada de P se compone (71) de la correspondiente á la carga aislada, mas $\frac{1}{24}\left(1+\frac{6\,\delta^3-\gamma_1}{\gamma_{k-1}}\right)$ ó $\frac{1}{24}\left(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_{k-1}}\right)$ segun que k sea par ó impar, y para el punto Q la misma expresion, cambiando $k-1$ por $n-k$, y restando ademas la cuarta parte de la distancia QN hasta el apoyo $k+1$.

Conocida la parábola correspondiente al caso 1.°, se averiguará muy fácilmente la recta del caso 4.°, que es su complementario, y ademas la recta del caso 2.°, que se obtendrá prescindiendo en las ordenadas de los puntos P y Q del caso 1.° del término relativo á la carga aislada del tramo, y por consiguiente, sin necesidad de hacer nuevos cálculos, podrémos trazar la recta de los momentos, y como quiera que estos valores están dados por expresiones áun más sencillas que las del caso 1.°, será preferible tomarlos como punto de partida; de manera que en las tablas que acompañamos para la resolucion práctica del problema, y una vez que conociendo las ordenadas de P y Q en cualquiera de los seis casos se hallan los restantes, hemos preferido calcular lasordenadas relativas al 2.° caso. Éstas, á su vez, nos darán á conocer su parábola complementaria, ó sea la del caso 5.°; y por último, para hallar la del caso 6.° sabemos que su ordenada en el punto P es igual á la de la parábola del caso 5.°, y la de Q á la del caso 1.°, y las del caso 3.° coinciden respectivamente con los del 2.° y 4.°

Si todos los tramos son iguales, se simplifican áun más los resultados que hemos obtenido. Las dos parábolas que realmente hay que determinar son, como hemos visto en lo que precede, la 1.ª y la 6.ª; pues bien, la 6.ª coincide con la auxiliar de que hablamos en el número 46, trazada de manera que sus ordenadas en los apoyos sean iguales á la mitad de las correspondientes á la carga permanente, y la 1.ª tendria la misma ordenada en Q, y la de P se obtendria de la del caso 1.°, restando la cuarta parte de la abscisa MP.

Para tener en cuenta los efectos de la carga permanente, será preciso tambien dividir por el factor p, ó sea el peso del metro lineal de sobrecarga, la ecuacion de la parábola que se convertirá en $y = \frac{1}{2}\frac{p'}{p} x^2$, cuya plantilla habrá que construir, pues será distinta de la que hemos dicho que nos servirá para trazar las parábolas anteriores. Si, como generalmente se acostumbra, se ha trazado por la parte superior del eje la línea envolvente de los momentos debidos á la sobrecarga, se trazarán en la parte inferior las de la carga permanente con la citada plantilla, y de modo que en cada tramo pase la curva por los dos puntos de interseccion U y V (*figura* 5.ª), con el mismo eje de la parábola trazada con la plantilla $y = \frac{1}{2} x^2$ para la division en trozos; de manera que tomando la curva de ambas ordenadas, superior é inferior, tendrémos el momento de flexion en cada punto.

Para el mismo objeto se puede construir una sola línea envolvente, sumando en cada tramo las ecuaciones de ambas, y entónces los casos 1, 5 y 6 (*figura* 5.ª) estarán dados por parábolas, cuya ecuacion será $y = \frac{1}{2}\left(1+\frac{p'}{p}\right) x^2$ y las 2, 3 y 4 tambien por parábolas determinadas por $y = \frac{1}{2}\frac{p'}{p} x^2$, y consideramos preferible hacer esta reunion, porque de este modo, si se trata por ejemplo de una viga de I en que, como generalmente sucede para los puentes, se desprecia la resistencia á la flexion de la pared vertical, los espesores de las cabezas de la I son proporcionales á los momentos de flexion, lo cual abrevia la determinacion de aquéllos.

En efecto, conocido en un punto cualquiera de la viga el momento de flexion **M**, lo igualarémos al de rotura $\frac{R\,Y}{v'}$ en que R es la resistencia permanente del material, Y el momento de inercia, y v' la mayor ordenada de la seccion trasversal, ó sea la distancia al eje neutro, de manera que aquella ecuacion nos determina la incógnita del problema, y si, como sucede en el caso que hemos citado de las vigas de I, los espesores de las cabezas son proporcionales á los momentos de flexion, nos bastará hacer este cálculo en un solo punto, y así que se sepa que el espesor del palastro es, por ejemplo, de $0^m,025$, se dividirá en dos partes y media la ordenada de la envolvente, y luégo cada division en diez, se trazarán despues líneas horizontales por cada uno de estos puntos, y se conocerán, por lo tanto, los espesores en todos ellos en milímetros.

La marcha que, segun acabamos de explicar, debe seguirse para el cálculo de los momentos de flexion máximos y la determinacion de los espesores de la viga es muy sencilla; pero, á fin de que para la aplicacion á la práctica no haya necesidad de hacer cálculo alguno, acompañamos al final de esta Memoria todas las tablas necesarias para la determinacion de las líneas envolventes en las vigas de 1 á 12 tramos para 15 valores de δ comprendidos entre 0,60 y 1,50 ambos inclusive, de que nos ocuparémos al final del capítulo siguiente.

57. *Valores máximos de los esfuerzos trasversales.* Se empezará por dividir el tramo (*figura* 6.ª) en tres trozos, para lo cual habrá que fijar la posicion de los puntos O y O′, que no son otra cosa sino las intersecciones de la recta **M N** con los ejes de las parábolas de la carga aislada y la carga permanente, para lo cual bastará que en la plantilla que se emplee para trazar aquellas curvas esté señalado su eje, y que se tenga cuidado de marcar su posicion cuando se tracen aquellas dos parábolas. Dividido el tramo en trozos, se determinarán las rectas 1 y 5 de la citada figura, con la condicion de que estén inclinadas á 45 grados respecto del eje **M N**, y de que corten al mismo en los puntos correspondientes á los ejes de las dos parábolas de aquellos casos, y que están marcados en la *figura* 6.ª Una vez trazadas las rectas 1 y 5, se levantarán en O y O′ las verticales, cada una de las que se prolongará hasta la interseccion con aquellos dos, y tomando en cada vertical la mayor en valor absoluto entre la ordenada positiva y negativa, se tirarán las horizontales 2 y 4, y quedará determinado el contorno poligonal de los máximos esfuerzos trasversales debidos á la sobrecarga. Para tener en cuenta el efecto de la carga permanente, bastará trazar desde el punto O′ una recta, cuya tangente sea $\frac{p'}{p}$ que sumada al contorno ántes hallado tanto para la parte positiva como para la negativa, nos dará los esfuerzos trasversales totales; y conocidos éstos, será muy fácil calcular las dimensiones de la pared vertical de la viga.

Con esto queda terminada la exposicion del método á que hemos llegado para el cálculo de las vigas simétricas de número impar de tramos intermedios iguales, y un problema á primera vista tan complicado, para tener en cuenta todas las combinaciones posibles de la sobrecarga que conduzcan á la determinacion del máximo momento de flexion y esfuerzo trasversal en cada punto, ha quedado reducido á un procedimiento tan conciso y elemental, que con ligeras explicaciones pueden aplicarlo las personas que no conocen el cálculo, áun sin el auxilio de las tablas. Verdad es que **Mr.** Bresse ha publicado un formulario gráfico para las vigas de uno á siete tramos, y por consiguiente, nos da ya el cálculo hecho; pero, en primer lugar, no ha tenido en cuenta más que ocho valores de δ, y á pesar de que generalmente serán suficientes para la práctica, podrá suceder tambien que se presenten casos distintos de éstos, y de aplicar algun procedimiento, creemos que el que hemos expuesto tiene la ventaja de ser más expedito para un caso determinado, y ofrece ademas la gran ventaja respecto de los métodos anteriores de que, una vez calculada una viga de cierto número de tramos, queda todo determinado para las que tengan menor número; y por último, cuando en las primeras publicaciones de esta índole se han presentado recientemente largos cálculos áun para el caso de vigas de tramos iguales, creemos que no carece de oportunidad el dar á conocer un procedimiento más sencillo.

CAPÍTULO V.

DEL CÁLCULO DE LAS VIGAS SIMÉTRICAS DE NÚMERO PAR DE TRAMOS INTERMEDIOS IGUALES.

58. *Teorema fundamental.* En los tres capítulos anteriores hemos estudiado con todo detalle el problema relativo al cálculo de las vigas de número impar de tramos, habiendo demostrado que el procedimiento más sencillo que puede seguirse con tal objeto, consiste en la determinacion prévia de las ordenadas de los puntos P y Q, para la carga aislada del tramo que se considere, para la carga permanente y para el 1.er ó 2.° caso de la distribucion de la sobrecarga; pues bien, vamos ahora á demostrar que si comparamos aquellos valores en un caso cualquiera de la distribucion de la sobrecarga para una viga de $2\,m+1$ tramos, y otra de $2\,m$, siendo el mismo el valor de δ, las ordenadas de los puntos P serán iguales en los tramos k del mismo órden, y las de Q en el tramo k de la de $2\,m+1$ tramos, y el $k-1$ de la de $2\,m$.

En efecto, si aplicamos al caso de las vigas simétricas de tramos intermedios iguales la fórmula general deducida en el número 10 para la ordenada del punto P, tendrémos,

$$\mathrm{PP}' = \frac{\pm\,\delta^3 p_1 \mp \beta_1\, p_2 \pm \cdots\cdots\ \beta_{k-2}\, p_{k-1}}{4\,\gamma_{k-1}}\, l^2 - \frac{1}{4}\,\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}}\, p_k\, l^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}}\right) p_k\, l^2$$

que será constante para dos vigas cualesquiera, siempre que l y δ sean iguales y que se supongan cargados los mismos tramos de los comprendidos entre la extremidad y el de órden k, sea par ó impar el número total de los tramos de la viga.

Del mismo modo tenemos para la ordenada del punto Q

$$\mathrm{QQ}' = \frac{\beta_{n-k-1}\, p_{k+1} - \beta_{n-k-2}\, p_{k+2} + \cdots\cdots \mp \beta_1\, p_{n-1} \pm \delta^3\, p_n}{4\,\gamma_{n-k}} - \frac{1}{4}\,\frac{\alpha_{n-k-1}}{\gamma_{n-k}}\, p_k\, l^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{n-k-1}}{\gamma_{n-k}}\right)^2 p_k\, l^2$$

debiendo tomarse los signos superiores ó inferiores, segun que $n-k$ sea impar ó par. Ahora bien; si comparamos tambien en dos vigas cualesquiera, tramos equidistantes de la otra extremidad, en que $n-k$ tendrá, por consiguiente, igual valor, y suponemos con sobrecarga los mismos tramos, QQ′ se conservará constante, cualquiera que sea el número, la longitud y carga que sostengan los tramos comprendidos entre el k y la extremidad número 1 de la viga; de manera, que no sólo queda demostrado el teorema enunciado, sino que de su demostracion se deduce que pudiéramos haberle dado mayor generalidad, aunque nos hemos limitado á la forma más conveniente para nuestro objeto.

De aquí se deduce una nueva é importante simplificacion del procedimiento para el cálculo de las vigas simétricas de número par de tramos, y es, que conocidas las ordenadas de P y Q para una viga de $2\,m+1$ tramos, no habrá que hacer ningun nuevo cálculo para las que tengan desde 2 hasta $2\,m$ tramos; por consiguiente, áun suponiendo que se aplicase el empleo de la plantilla para el trazado de las parábolas calculando por las fórmulas ántes conocidas los momentos de los apoyos, era preciso para calcular las vigas desde 1 hasta $2\,m$ tramos, estudiar cuatro casos distintos de la reparticion de le sobrecarga, lo que daba un número total (con algun ligero error, por coincidir algunos casos) de

$$4\,(1+2+3+\cdots\cdots+n) = \frac{4\,n\,(n+1)}{2} = 2\,n\,(n+1)$$

miéntras que por el procedimiento que hemos expuesto se reducen á $3\,n$, que es mucho menor que aquella cantidad, y con la circunstancia de que son de más fácil aplicacion las fórmulas deducidas para este método.

59. *Efectos de la carga aislada.* En realidad basta con lo que antecede para resolver por completo el problema que nos ocupa, puesto que queda reducido al de las vigas de número impar de tramos, pero creemos conveniente, aunque no sea indispensable, la determinacion de los valores de los momentos y esfuerzos trasversales de los apoyos en los mismos casos de que nos hemos ocupado en los capítulos anteriores.

Limitándonos por el momento á la carga aislada de un solo tramo, observarémos que cuanto dijimos en el párrafo 1.° del capítulo II, es completamente aplicable al caso de las vigas de número par de tramos, de manera que suponiendo tambien cargado el tramo k, se llega para el momento M_k á la misma fórmula (54) allí deducida, pero no quiere esto decir que sean iguales los valores de M_k para las vigas de par é impar número de tramos, sino que son siempre distintos, como se deduce examinando la citada fórmula.

Para el momento de flexion en el apoyo $k+1$, suponiendo que continue cargado el tramo k, y para el esfuerzo trasversal T_k se obtienen igualmente las expresiones (56) y (58).

60. *Fórmulas generales relativas á la carga permanente.* Ya hemos demostrado en el número 58 que las ordenadas de los puntos P y Q son las mismas que para las vigas de número impar de tramos, de manera que si de la viga que tenga $2m+1$ pasamos á la de $2m$, habrá que tomar para PP′ si el tramo de órden k es par, el valor (68) y para QQ′ el segundo del grupo (69 bis) y si k es impar, respectivamente la 1.ª del (69 bis) y la (69), puesto que si $n-k$ era par para el caso en que se dedujeron aquellas fórmulas, será ahora impar, y viceversa.

La expresion general del momento de flexion en un apoyo siendo n un número par, está dada (5) suponiendo $p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n = p$ por

$$M_k = \frac{\alpha_{n-k}\,(\pm\delta^3 \mp \beta_1 \pm \beta_2 \cdots\cdots - \beta_{k-3} + \beta_{k-2})}{4\,(\alpha_{n-k}\,\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\,\alpha_{k-2})}\,p\,l^2$$

$$+ \frac{\alpha_{k-2}(\beta_{n-k} - \beta_{n-k-1} + \cdots\cdots \mp \beta_1 \pm \delta^3)}{4\,(\alpha_{n-k}\,\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\,\alpha_{k-2})}\,p\,l^2$$

debiéndose tomar respectivamente los signos superiores é inferiores para los apoyos de órden par é impar. Esta fórmula difiere de la relativa á las vigas de número par de tramos, en que el primero y último son del mismo signo, y en aquella de signos contrarios.

(*Se continuará.*)

PABLO DE ALZOLA.

ELECCION DE LA COMISION DE FUNERALES
PARA EL BIENIO DE 1871 Á 1873.

En la noche del 16 de Diciembre último, y en el local de la Junta Consultiva, se verificó, bajo la presidencia del Excmo. Sr. D. Francisco Barra, la junta general convocada por el mismo, para la eleccion de la Comision de funerales del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, que debe funcionar durante el bienio de 1871 á 1873.

Como quiera que todos nuestros compañeros tendrán exacto y detallado conocimiento de los asuntos que en ella se trataron, omitimos darlos á conocer en este momento, limitándonos á consignar algunos puntos de carácter general únicamente.

Durante el ejercicio de la Comision que acaba de cesar, y que comprende desde 1.° de Julio de 1868 á 31 de Diciembre de 1870, han fallecido los señores Ingenieros que citamos á continuacion, con la fecha y lugar de su defuncion.