

MADRID, 13 DE DICIEMBRE DE 1870.

TOMO XVIII.

NÚM. 24.

TEORÍA

DEL

CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(Continuacion.)

CAPÍTULO IV.

LÍNEAS ENVOLVENTES DE LOS MOMENTOS Y ESFUERZOS TRASVERSALES, EN UNA VIGA SIMÉTRICA DE NÚMERO IMPAR DE TRAMOS INTERMEDIOS IGUALES.

§ 1.º—Expresiones de estas cantidades para los diversos casos correspondientes á sus máximos valores.

42. *Momento de flexion de un apoyo cualquiera en los casos 1.º y 4.º*.—En el número 8 redujimos el estudio de todas las hipótesis que pudieran hacerse respecto de la situacion de la sobrecarga, solamente á tres distintas (ademas del de la carga aislada y la permanente), y empezaremos por el 1.º, en que se suponen cargados los dos tramos contiguos al apoyo que se considere, y los demas alternativamente descargados y cargados, y el 4.º, que es su complementario.

Para esto recordaremos que el momento debido á la carga permanente está dado por

$$P_k = \frac{\alpha_{n-k} (\pm \delta^3 \mp \beta_1 \pm \beta_2 \dots + \beta_{k-2}) + \alpha_{k-2} (\beta_{n-k} - \dots \pm \beta_1 \mp \delta^3)}{4 D} p l^2$$

El momento correspondiente al caso 1.º está dado por la suma de los términos positivos de P_k y el del caso 4.º por la suma de los negativos, y ambos los designaremos respectivamente por $M_k^{1.º}$ y $M_k^{4.º}$.

Ahora bien, para determinar estos valores, supongamos que se cambian de signo todos los términos negativos de P_k , y llamemos á la suma de todos ellos R_k ; tendremos

$$R_k = \frac{\alpha_{n-k} (\delta^3 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-2}) + \alpha_{k-2} (\beta_{n-k} + \dots + \beta_1 + \delta^3)}{4 D} p l^2$$

y por consiguiente

$$\left. \begin{aligned} M_k^{1.º} + M_k^{4.º} &= P_k \\ M_k^{1.º} - M_k^{4.º} &= R \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce

$$\left\{ \begin{aligned} M_k^{1.º} &= \frac{P_k + R_k}{2} \\ \text{y } M_k^{4.º} &= \frac{P_k - R_k}{2} \end{aligned} \right.$$

pero

$$R_k = \frac{\alpha_{n-k}(\delta^3 + \alpha_{k-2} - 1) + \alpha_{k-2}(\alpha_{n-k} - 1 + \delta^3)}{4\beta_m \gamma_m} p l^2 =$$

$$= \frac{(\delta^3 - 1)(\alpha_{n-k} + \alpha_{k-2}) + 2\alpha_{n-k}\alpha_{k-2}}{4\beta_m \gamma_m} p l^2$$

y como

$$\alpha_{n-k} + \alpha_{k-2} = B_{m-k+1} \gamma_m \quad (38)$$

$$R_k = \left[\frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k+1}}{4\beta_m} + \frac{\alpha_{n-k}\alpha_{k-2}}{2\beta_m \gamma_m} \right] p l^2$$

y substituyendo

$$\left. \begin{aligned} M_k^{1.0} &= \frac{1}{2} P_k + \left(\frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k+1}}{8\beta_m} + \frac{\alpha_{n-k}\alpha_{k-2}}{4D} \right) p l^2 \\ M_k^{4.0} &= \frac{1}{2} P_k - \left(\frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k+1}}{8\beta_m} + \frac{\alpha_{n-k}\alpha_{k-2}}{4D} \right) p l^2 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

45. *Trasformacion de estas expresiones.*—Mr. Bresse habia deducido ya estas fórmulas (aunque con la diferencia de las notaciones), pero repitiendo para cada caso largos cálculos análogos a los relativos a la carga permanente, mientras que nosotros hemos llegado a los resultados anteriores por un sencillo artificio de cálculo. Pero despues de deducir estas fórmulas, dice el mismo autor (página 209 de la tercera parte) que tienen el inconveniente respecto de las correspondientes a la carga permanente, de que no pueden trasformarse en fórmulas bastante concisas en que éntre δ explícitamente; pero del mismo modo que al tratar de los efectos de la carga aislada, hemos abordado tambien este problema, habiendo conseguido una solucion satisfactoria para la trasformacion del último término de las expresiones anteriores, que es el objeto de la cuestion.

En efecto, tenemos, segun la relacion (46),

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n-k}\alpha_{k-2} - \alpha_{n-(k-1)}\alpha_{k-3} &= A_{n-2, k+2} (4\delta^2 - 3) \\ \alpha_{n-k+1}\alpha_{k-3} - \alpha_{n-k+2}\alpha_{k-4} &= A_{n-2, k+4} (4\delta^2 - 3) \\ \vdots &\vdots \\ \alpha_{n-5}\alpha_1 - \alpha_{n-2}\alpha_0 &= A_{n-4} (4\delta^2 - 3) \end{aligned} \right\} \text{ y substituyendo}$$

$$\alpha_{n-k}\alpha_{k-2} = (A_{n-2, k+2} + A_{n-2, k+4} + \dots + A_{n-4}) (4\delta^2 - 3) + \alpha_{n-2} =$$

$$= [(A_1 + A_3 + \dots + A_{n-4}) - (A_1 + A_3 + \dots + A_{n-2, k})] (4\delta^2 - 3) + \alpha_{n-2} =$$

$$= \frac{E_{n-1} - E_{n-2, k+1}}{6} (4\delta^2 - 3) + \alpha_{n-2}$$

y por consiguiente

$$M_k^{1.0} = \frac{1}{2} P_k + \left[\frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k+1}}{8\beta_m} + \frac{(E_{n-1} - E_{n-2, k+1}) (4\delta^2 - 3)}{24\beta_m \gamma_m} + \frac{\alpha_{n-2}}{4\beta_m \gamma_m} \right] p l^2 \quad (74)$$

y si se quiere se puede transformar el último término

$$\frac{\alpha_{k-2}}{4 \beta_m \gamma_m} = \frac{\gamma_m \beta_{m-1} - 1}{4 \beta_m \gamma_m} = \frac{\beta_{m-1}}{4 \beta_m} - \frac{1}{4 \beta_m \gamma_m}$$

en que la segunda fracción es despreciable, y la otra independiente de k ; de manera que para cada valor de δ es común a todos los momentos de los diversos apoyos, y aún varía muy poco con δ . La expresión de $M_k^{4.0}$ se obtendría de la de $M_k^{1.0}$ sin más que el cambio del signo de la cantidad comprendida dentro del paréntesis.

44. *Discusion de las fórmulas anteriores.*— Si sustituimos en la expresión de $M_k^{1.0}$ (74) en vez del momento debido a la carga permanente, su valor

$$P_k = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 \pm \frac{(3\delta^3 - 2\delta) C_{m-k+1}}{\gamma_m} \right)$$

aquella fórmula se compondrá de cinco términos, á saber: $\frac{1}{24} p l^2$, que es constante: $\frac{\alpha_{n-2}}{4 \beta_m \gamma_m} p l^2$, que

es independiente de k , ó sea del orden del apoyo, y además otros tres, que dependen de δ y k . La suma algebraica de todos estos términos dará siempre un resultado positivo para $M_k^{1.0}$ y negativo para $M_k^{4.0}$ puesto que el primero procede de la reunión de los términos afectados del signo más en la fórmula general, y el segundo de los negativos.

De los tres términos que hemos dicho que dependen de δ y k , el primero, ó sea el correspondiente á la carga permanente, se reduce á cero para $\delta=0$ y $\delta=\sqrt{\frac{2}{3}}$, el segundo para $\delta=1$, y el tercero para $\delta=\sqrt{\frac{2}{3}}$, y como el valor de $\delta=1$ da en la suma de los tres un valor negativo, y $\delta=\sqrt{\frac{2}{3}}$ un resultado positivo si k es par, aquélla pasará necesariamente por cero para un valor de $\delta < 1$; pero como δ dependerá de k , resulta que los momentos máximos en los puntos de apoyo correspondientes al caso primero de la repartición de la sobrecarga no pueden ser iguales para ningún valor de δ , por el contrario de lo que sucede para la carga aislada y la permanente.

Si todos los tramos son iguales, es decir, que $\delta=1$, las fórmulas anteriores se simplifican mucho.

En efecto,

$$M_k^{1.0} = \frac{1}{2} P_k + \left(\frac{E_{n-3} - E_{n-2 k+1}}{24 B_m C_m} + \frac{A_{n-2}}{4 B_m C_m} \right) p l^2$$

pero

$$B_m C_m = A_{n-1} \quad \text{y} \quad E_{n-3} + 6 A_{n-2} = E_{n-1}$$

luego

$$M_k^{1.0} = \frac{1}{2} P_k + \frac{E_{n-1} - E_{n-2 k+1}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

y

$$M_k^{4.0} = \frac{1}{2} P_k - \frac{E_{n-1} - E_{n-2 k+1}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

siendo

$$P_k = \frac{1}{12} \left(1 \pm \frac{C_{m-k+1}}{C_m} \right) p l^2 \quad \text{como vimos en el número 35.}$$

45. *Valores de los esfuerzos transversales en los apoyos para los mismos casos.* Éstos los determinaremos de una manera enteramente análoga a los momentos.

El esfuerzo transversal debido a la carga permanente, que lo llamaremos P'_k , está dado por

$$P'_k = \frac{\gamma_{n-k} (\pm \delta^3 \mp \beta_1 \pm \beta_2 \dots + \beta_{k-2}) + \gamma_{k-1} (\beta_{n-k} - \dots \pm \beta_1 \mp \delta^3)}{4 D} p l + \frac{1}{4} p l$$

llamemos R'_k a la suma de los mismos términos afectados todos del signo más, y $T_k^{1.0}$ y $T_k^{4.0}$ respectivamente a los esfuerzos transversales en el apoyo k en ambos casos, tendremos, como anteriormente:

$$T_k^{1.0} = \frac{P'_k + R'_k}{2} \quad y \quad T_k^{4.0} = \frac{P'_k - R'_k}{2}$$

siendo

$$R'_k = \frac{(\delta^3 - 1) (\gamma_{k-1} + \gamma_{n-k}) + \gamma_{n-k} \alpha_{k-2} + \gamma_{k-1} \alpha_{n-k}}{4 D} p l + \frac{1}{4} p l$$

pero

$$\gamma_{k-1} + \gamma_{n-k} = 2 E_{m-k} \gamma_m$$

y

$$\gamma_{n-k} \alpha_{k-2} + \gamma_{k-1} \alpha_{n-k} = 2 \gamma_{n-k} \alpha_{k-2} - \gamma_{n-k} \alpha_{k-2} + \gamma_{k-1} \alpha_{n-k} = 2 \gamma_{n-k} \alpha_{k-2} + D$$

según las relaciones (41) y (20).

Luego

$$R'_k = \frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k}}{4 \beta_m} p l + \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma_{n-k} \alpha_{k-2}}{2 \beta_m \gamma_m} \right) p l$$

y por consiguiente, sustituyendo

$$T_k^{1.0} = \frac{1}{2} P'_k + \frac{1}{4} p l + \frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k}}{8 \beta_m} p l + \frac{\gamma_{n-k} \alpha_{k-2}}{4 \beta_m \gamma_m} p l$$

cuyo último término podría transformarse en una función explícita de δ , siguiendo el método aplicado al tratar del momento en el mismo apoyo.

46. *Momento de flexión en un punto cualquiera del tramo de orden k para los citados casos 1.º y 4.º.* Sustituyendo en la ecuación general $M_k(x)$ en vez del momento y esfuerzo transversal k los valores de $M_k^{1.0}$ y $T_k^{1.0}$, tendremos

$$\begin{aligned} M_k^{1.0}(x) &= M_k^{1.0} - T_k^{1.0} x + \frac{1}{2} p x^2 = \\ &= \frac{1}{2} (P_k - P'_k x - \frac{1}{2} p x + p x^2) + \frac{(\delta^3 - 1) [B_{m-k+1} - 2 E_{m-k} x]}{8 \beta_m} p l + \frac{\alpha_{k-2} (\alpha_{n-k} - \gamma_{n-k} x)}{4 \beta_m \gamma_m} p l \end{aligned}$$

Si hacemos en esta expresión $x = l$ y designamos también por N el momento en el apoyo $k+1$, se obtendrá

$$N_{k+1}^{1.0} = \frac{1}{2} P_{k+1} - \frac{(\delta^3 - 1) B_{m-k}}{8 \beta_m} p l^2 - \frac{\alpha_{k-2} \alpha_{n-k-1}}{4 D} p l^2$$

pero no hay necesidad de determinar por cálculo este valor, pues basta observar que la fórmula anterior, que nos da $M_k^{1.º}$ (x), se compone de tres términos, que representan: el 1.º la parábola, que es siempre la misma para todos los casos, trazada de manera que pase en ambos apoyos por los puntos m' y n' (figura 10.^a), cuyas ordenadas sean la mitad de las correspondientes á la carga permanente MM' y NN' , y además de dos rectas que cortan al eje de las x en puntos fijos Y y Q determinados por $x = \frac{1}{2} \frac{B_{m-k+1}}{E_{m-k}} l$ para la primera, y $x = \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l$ para la segunda, que nos da el punto Q de todas las figuras; por consiguiente, conocido el punto $M^{1.º}$ de la parábola correspondiente en el tramo k al caso 1.º para hallar el $N^{1.º}$, se trazarán las rectas $Y Y'$ y $Q Q'$, que pasan respectivamente por los puntos Y y Q ; y haciendo las operaciones ántes indicadas, hallaremos la ordenada $NN^{1.º}$.

La abscisa MQ es siempre menor que la MY , porque

$$MQ = \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-k}}} l$$

y

$$MY = \frac{B_{m-k+1}}{B_{m-k} + B_{m-k+1}} l = \frac{1}{1 + \frac{B_{m-k}}{B_{m-k+1}}} l$$

pero como $n - k > m - k + 1$; $\frac{\alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-k}} > \frac{B_{m-k}}{B_{m-k+1}}$ y por lo tanto $MQ < MY$, siendo MY ligeramente inferior á MT , ó sea la abscisa de las ordenadas constantes debidas á la carga permanente.

Para el caso 4.º los momentos de flexion del tramo k estarán determinados por una línea recta, de manera que los complementos $M' M^{1.º}$ y $N' N^{1.º}$ respecto de los momentos debidos á la carga permanente (que suponemos sea la parábola $M' N'$) en los puntos M y N , nos darán las ordenadas de la recta de los momentos en los mismos puntos.

En ambos casos, una vez conocidos los momentos en dos apoyos consecutivos, pudiéramos determinar los correspondientes á los demás apoyos por las ecuaciones de los tres momentos, pero esto no es necesario, porque los valores así determinados no nos habian de conducir en ningún punto á los máximos valores de los mismos, que son los que hay que hallar para el trazado de las líneas envolventes.

Si todos los tramos son iguales, el valor del momento en el apoyo $k + 1$, que se deduce de la fórmula anterior, se transforma en la expresion siguiente:

$$N_{k+1}^{1.º} = \frac{1}{2} P_{k+1} - \frac{E_{n-2} - E_{n-2k}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

47. *Puntos notables de la curva de los momentos en el caso 1.º* Ya sabemos que para el punto Q (figura 10.^a) se anula el tercer término de la expresion deducida en el número anterior; para el momento de flexion en un punto cualquiera del tramo k ; el primer término representa la ordenada de una parábola cuya posicion se conoce, y el segundo, que es

$$\frac{(\delta^2 - 1) B_{m-k+1} l - 2 E_{m-k} x}{8 \beta_m} p l,$$

se convierte haciendo $x = MQ = \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l$, y simplificando como se deduce de las relaciones del número 14 en

$$\frac{(\delta^3 - 1) (B_{m-k-1} \gamma_{n-k} - 2 E_{m-k} \alpha_{n-k})}{8 \beta_m \gamma_{n-k}} p l^2 = \frac{1 - \delta^3}{8 \gamma_{n-k}} p l^2$$

que es una expresion sencillísima, de manera que para conocer la ordenada en el punto Q de la parábola correspondiente al caso 1.º de la reparticion de la sobre-carga, bastará añadir esta cantidad á la ordenada de la curva dada por el primer término, que segun sabemos se determina con la misma plantilla de siempre, y trazando la parábola de manera que pase en los apoyos á alturas iguales á la mitad de las relativas á la carga permanente.

Las ordenadas de los puntos Y y T (figura 10.ª) están tambien dadas por expresiones sencillas; pero como estos puntos están contiguos al Q, no nos interesa su determinacion, y vamos á hallar la del

punto P, que la llamaremos PP^{1.º}, cuya abscisa es como sabemos $\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l$

$$\begin{aligned} PP^{1.º} &= 1.º \text{ término} + \frac{(\delta^3 - 1) (B_{m-k+1} \gamma_{k-1} - 2 E_{m-k} \alpha_{k-2})}{8 \beta_m \gamma_{k-1}} p l^2 + \\ &+ \frac{\alpha_{k-2} (\alpha_{n-k} \gamma_{k-1} - \gamma_{n-k} \alpha_{k-2})}{4 D \gamma_{k-1}} p l^2 = \\ &= 1.º \text{ término} + \left(\frac{\delta^3 - 1}{8 \gamma_{k-1}} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} \right) p l^2 \end{aligned}$$

que se compone de la ordenada de la mencionada parábola, de un término muy sencillo, y de la misma forma que el ántes deducido para el punto Q, y ademas del producto de $\frac{1}{4} p l$ por la abscisa

MP = $\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l$ calculada ya para fijar el punto P. Vemos, pues, cuán fácil es la determinacion de los

puntos P^{1.º} y Q^{1.º} de la curva de los momentos correspondientes al caso 1.º, y por consiguiente, el trazado de la parábola relativa á este caso de reparticion de la sobre-carga, y como los valores que hemos deducido para las ordenadas de los puntos P y Q son expresiones mucho más sencillas que las de los momentos de los apoyos, resulta que será preferible calcular las ordenadas PP^{1.º} y QQ^{1.º} á las de los puntos M y N para poder aplicar la plantilla y trazar la parábola de los momentos.

Si todos los tramos son iguales, $\delta^3 - 1$ se reduce á cero, y por consiguiente se simplifican aún más los resultados anteriores. La ordenada QQ^{1.º} es igual á la de la parábola auxiliar ántes citada, y la PP^{1.º} se compone de ésta y ademas de la relacion de la abscisa MP á l (suponiendo que el trazado de las lineas de los momentos se hace quitando el factor comun $p l^2$).

Todavía se puede dar otra forma más conveniente á los valores de las ordenadas PP^{1.º} y QQ^{1.º} tomando como punto de partida la expresion general (66) de $M_k(x)$, y procediendo de la misma manera que en el número 57 al ocuparnos de la carga permanente, se obtienen los resultados siguientes :

$$\left. \begin{aligned} PP^{1.º} &= \frac{p l^2}{24} \left(1 + \frac{6 \delta^3 - \gamma_1}{\gamma_{k-1}} \right) + \text{Ordenada de la carga aislada} \\ PP^{1.º} &= \frac{p l^2}{24} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_{k-1}} \right) + \text{id.} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

segun que k sea par ó impar, y respectivamente

$$\left. \begin{aligned} QQ^{1.º} &= \frac{p l^2}{24} \left(1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_{n-k}} \right) - \frac{\alpha_{n-k-1}}{4 \gamma_{n-k}} p l^2 + \text{Ordenada de la carga aislada} \\ QQ^{1.º} &= \frac{p l^2}{24} \left(1 - \frac{6 \delta^2 - \gamma_1}{\gamma_{n-k}} \right) - \frac{\alpha_{n-k-1}}{4 \gamma_{n-k}} p l^2 + \text{id.} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

expresiones que tienen la ventaja respecto de las anteriormente deducidas, de no exigir la construcción de ninguna parábola auxiliar, sino la sustitución de las ordenadas de la curva correspondiente a la carga aislada en los puntos P y Q, cuya determinación es indispensable para aplicar nuestro método. Además, si recordamos lo que dijimos en el número 27, y examinamos los valores de $PP^{1.º}$ y $QQ^{1.º}$, observaremos que ambos son independientes de n y dependen los primeros sólo de k y los segundos de $n-k$, cuya propiedad nos indica también para este caso que, una vez calculados estos valores para una viga de cierto número de tramos, no habrá que hacer ningún nuevo cálculo para todas aquellas en que n sea menor.

Respecto del caso 4.º, nada añadiremos a lo que llevamos dicho, puesto que conocido el 1.º, no ofrecerá aquél ninguna dificultad, por ser su complementario.

48. *Casos 2.º y 5.º de la repartición de la sobre-carga.* El caso 2.º, según vimos en el número 8, sólo difiere del 1.º en que el tramo de orden k está descargado, de manera que quedan vacíos éste y el $k+1$, y los demás alternativamente cargados y descargados, siendo el caso 5.º su complementario.

Para hallar tanto los momentos de flexión como los esfuerzos transversales para el caso 2.º en los apoyos k y $k+1$ ó en otros dos puntos cualesquiera, bastará restar de los correspondientes al caso 1.º los relativos a la carga aislada, y una vez conocidas ambas ordenadas, las rectas que unan estos puntos nos darán respectivamente la línea de los momentos y la de los esfuerzos transversales, y conocidos los valores correspondiente al caso 2.º, será fácil resolver el 5.º, que es su complementario, como hemos dicho antes.

Si los tramos son iguales, se deducen las fórmulas siguientes:

$$M_k^{2.º} = \frac{1}{2} P_k + \frac{E_{n-2} - E_{n-2-k}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

y

$$M_k^{5.º} = \frac{1}{2} P_k - \frac{E_{n-2} - E_{n-2-k}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

y para el otro apoyo del mismo tramo

$$N_{k+1}^{2.º} = \frac{1}{2} P_{k+1} - \frac{E_{n-1} - E_{n-2-k-1}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

$$N_{k+1}^{5.º} = \frac{1}{2} P_{k+1} + \frac{E_{n-1} - E_{n-2-k-1}}{24 A_{n-1}} p l^2$$

En estos casos, como en los anteriores, conviene calcular siempre las ordenadas de los puntos P y Q, lo cual no puede ser más sencillo, pues bastará para el caso 2.º quitar el último término de las fórmulas (75) y (76), que representa el momento debido a la carga aislada del tramo k .

49. *Momento de flexión y esfuerzo transversal en un apoyo cualquiera para los casos 3.º y 6.º* En el caso 3.º el tramo k está descargado, y todos los demás alternativamente. Para determinar el momento en el apoyo k llamémoslo $M_k^{3.º}$ y $M_k^{6.º}$ su complemento, y tendremos, si k es par

$$M_k^{3.0} = \frac{-\alpha_{k-2} (\beta_{n-k-1} + \beta_{n-k-3} + \dots + \delta^3) + \alpha_{n-k} (+\delta^3 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-2})}{4 D} p l^2$$

y además

$$M_k^{3.0} + M_k^{6.0} = P_k$$

y

$$\begin{aligned} M_k^{3.0} - M_k^{6.0} &= \frac{-\alpha_{k-2} (\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1} + \alpha_{n-k-1} - \alpha_{n-k-2} + \dots + \alpha_1 - 1 + \delta^3)}{4 D} p l^2 \\ &+ \frac{\alpha_{n-k} (\delta^3 - 1 + \alpha_1 - \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-2})}{4 D} p l^2 = \\ &= \frac{(\delta^3 - 1) (\alpha_{n-k} - \alpha_{k-2})}{4 \beta_m \gamma_m} p l^2 = \frac{(\delta^3 - 1) C_{m-k+1}}{4 \gamma_m} p l^2 \end{aligned}$$

y si k es impar, se obtiene el mismo resultado.

De manera que

$$M_k^{3.0} = \frac{1}{2} P_k + \frac{(\delta^3 - 1) C_{m-k+1}}{8 \gamma_m} p l^2$$

y

$$M_k^{6.0} = \frac{1}{2} P_k - \frac{(\delta^3 - 1) C_{m-k+1}}{8 \gamma_m} p l^2$$

Si $\delta = 1$, $M_k^{3.0} = M_k^{6.0} = \frac{1}{2} P_k$ lo cual nos prueba que en el caso en que todos los tramos sean iguales y estén cargados y descargados alternativamente, el momento de flexión en un apoyo cualquiera es el mismo que se obtendría si se cargasen los tramos vacíos y se descargasen los demás.

De la misma manera se deduce el esfuerzo trasversal en el apoyo k que resulta

$$\begin{aligned} T_k^{3.0} &= \frac{1}{2} P'_k + \frac{(\delta^3 - 1) (\gamma_{n-k} - \gamma_{k-1})}{8 \beta_m \gamma_m} p l - \frac{1}{8} p l \\ &= \frac{1}{2} P'_k + \frac{(\delta^3 - 1) 6 A_{m-k}}{8 \gamma_m} p l - \frac{1}{8} p l = \frac{1}{2} P'_k + \frac{3 (\delta^3 - 1) A_{m-k}}{4 \gamma_m} p l - \frac{1}{8} p l \end{aligned}$$

siendo P'_k como antes el esfuerzo trasversal correspondiente a la carga permanente. Para $\delta = 1$ tendremos también

$$T_k^{3.0} = \frac{1}{2} P'_k - \frac{1}{8} p l \quad \text{y} \quad T_k^{6.0} = \frac{1}{2} P'_k + \frac{1}{8} p l$$

50. *Momento de flexión para un punto cualquiera del tramo k en los casos 3.º y 6.º*

$$\begin{aligned} M_k^{6.0}(x) &= M_k^{6.0} - T_k^{6.0} x + \frac{1}{2} p x^2 = \\ &= \frac{1}{2} (P_k - P'_k x - \frac{1}{2} p x + p x^2) - \frac{(\delta^3 - 1) (C_{m-k+1} l - 6 A_{m-k} x)}{8 \gamma_m} p l \end{aligned}$$

Si hacemos $x=l$, tendremos,

$$N_{k+1}^{6.º} = \frac{1}{2} P_{k+1} - \frac{(\delta^3 - 1) C_{m-k}}{8 \gamma_m} p l$$

pero tampoco hay necesidad de determinar por cálculo este valor, porque puede tambien obtenerse por una construccion gráfica muy sencilla, pues basta observar que el 1.º término de $M_k(x)$ representa la misma parábola del número 46, cuyas ordenadas en los dos apoyos del tramo son respectivamente las mitades de los correspondientes á la carga permanente, y el 2.º término representa una recta que

corta siempre al eje de las x en un punto cuya abscisa es $x = \frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} l$, que es precisamente el punto

T de las figuras 8 y 9, en cuya vertical demostramos en el capítulo anterior que se cortan todas las parábolas debidas á la carga permanente.

Pero así como hemos demostrado en el número 47 para el caso 1.º, que hay dos puntos en el intermedio de los apoyos de cada tramo, en que las ordenadas de la linea de los momentos están determinadas por expresiones más sencillas que en aquéllos, recordaremos que sucede lo mismo para los casos 5.º y 6.º, segun dijimos en el número 10 al tratar de las vigas de tramos desiguales, de modo que en el punto P las ordenadas correspondientes á los casos 5.º y 6.º son respectivamente iguales á las del 2.º y 5.º, y en el punto Q á los del 4.º y 1.º; por consiguiente, es inútil que deduzcamos las fórmulas correspondientes, una vez que han de coincidir con los que hemos obtenido ya para los casos anteriores. De manera que no sólo se consigue reducir los 2º casos distintos de reparticion de la sobre-carga á tres distintos y sus complementarios, sino que aún de esos tres, dos de ellos se deducen inmediatamente del primero, calculando de antemano las ordenadas de los puntos P y Q para la parábola debida á la carga aislada.

Los esfuerzos transversales del tramo se determinarán en cualquiera de los casos que anteceden muy fácilmente cuando se conocen los del apoyo k por la fórmula (17), y tampoco habrá necesidad de aplicar las fórmulas deducidas en este párrafo para los puntos de apoyo, puesto que una vez trazadas las parábolas de los momentos, las distancias del apoyo k á los ejes de dichas curvas nos determinan cantidades proporcionales á los esfuerzos transversales; y no creemos necesario insistir más sobre este punto.

Con esto hemos completado el estudio del cálculo de los momentos y esfuerzos transversales en todos los casos necesarios para llegar al conocimiento de los máximos valores de estas cantidades, de que vamos á ocuparnos en el párrafo inmediato.

(Se continuará.)

PABLO DE ALZOLA.

OBRAS PÚBLICAS DE ESPAÑA.

(Continuacion).

XIV.

Si en la eleccion del personal facultativo hubo libertad, que podria calificarse de absoluta, no fué menor la que usaron las localidades en la ejecucion de las obras. Hasta el año 1862, las Diputaciones pudieron acordar la construccion de los caminos que tuvieran por conveniente; en dicho año se dispuso que las expresadas corporaciones

provinciales formuláran los planes de los caminos que quisieran establecer en sus respectivas demarcaciones, en armonia con el plan general del Estado y con el sistema de ferro-carriles, y con sujecion, ademas, á ciertas bases para procurar que se propusieran las lineas de mayor interes é importancia: así se verificó, aprobándose los planes en cuestion por el Gobierno, aunque reduciéndolos por punto general, á fin de ponerlos en relacion con los recursos probables de que podrian disponer para su realizacion. Pero, por lo comun, las obras ejecutadas no se han ajustado á los referidos planes, y ha sido frecuente que en lugar de cons-