

MADRID, 15 DE NOVIEMBRE DE 1870.

TOMO XVIII.

NÚM. 22.

TEORÍA

DEL

CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(Continuacion.)

Resulta, por consiguiente, que los dos puntos P y Q de cada tramo nos conducen tambien para los momentos debidos á la carga permanente, á valores que tienen la propiedad de ser independientes del número total de tramos, cuya circunstancia facilita mucho los cálculos respecto de la marcha que se ha seguido hasta ahora para resolver el problema, y como, segun hemos dicho repetidas veces, sólo nos hacen falta dos puntos para trazar la parábola, habrá que determinar el P' y otro de que nos ocuparemos en breve.

Si volvemos á la expresion general de PP', y observamos que el segundo y tercer término nos dan precisamente la ordenada debida á la carga aislada del mismo tramo, podremos poner

$$PP' = \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha_{k-2}}{4\gamma_{k-1}} + \frac{3\delta^2 - 2\delta}{12\gamma_{k-1}} \right) p l^2 - \frac{1}{2} p l x \left(\frac{1}{2} l - x \right)$$

y por consiguiente la ordenada que llamamos Pp en el núm. 27 será

$$\left. \begin{aligned} Pp &= PP' - \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha_{k-2}}{4\gamma_{k-1}} + \frac{3\delta^2 - 2\delta}{12\gamma_{k-1}} \right) p l^2 = \left(-\frac{1}{12} + \frac{\alpha_{k-2}}{4\gamma_{k-1}} + \frac{3\delta^2 - 2\delta}{12\gamma_{k-1}} \right) p l^2 \\ y \\ Qq &= \left(-\frac{1}{12} + \frac{\alpha_{n-k}}{4\gamma_{n-k}} + \frac{3\delta^2 - 2\delta}{12\gamma_{n-k}} \right) p l^2 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

que se componen de una cantidad constante más la cuarta parte de la abscisa MP ó MQ y de un término que es comun para el caso de la carga permanente y de la carga aislada, de manera que será preferible aplicar las fórmulas que acabamos de deducir para este último caso con preferencia á las del número 27.

Si ahora pasamos á determinar las mismas ordenadas para un tramo de orden impar, deducimos, repitiendo cálculos enteramente análogos á los anteriores,

$$\left. \begin{aligned} PP' &= \frac{1}{12\gamma_{k-1}} \left(-(3\delta^2 - 2\delta) + \frac{4\delta^2 - 3}{\gamma_{k-1}} \right) \\ QQ' &= \frac{1}{12\gamma_{n-k}} \left(-(3\delta^2 - 2\delta) + \frac{4\delta^2 - 3}{\gamma_{n-k}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (69 \text{ bis})$$

y en los valores correspondientes de Pp y Qq habrá que cambiar tambien el signo del último término.

58. *Valores que toman estas ordenadas.*— Para el estudio de los máximos momentos es conveniente que nos hagamos cargo de antemano de las posiciones que puede tomar la parábola de la carga permanente á medida que δ varía desde cero á ∞ , y vamos á estudiar las alteraciones que sufren las ordenadas PP' y QQ' , como lo hemos hecho ya para los momentos de las dos extremidades del tramo.

Si $\delta = 0$, las dos ordenadas (68) y (69) serán negativas, y conservarán este signo necesariamente hasta $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ puesto que tanto la primera parte como la segunda son también negativas. Para $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ el resultado es positivo; luego hay por lo menos un valor de δ comprendido entre ambos, que anula PP' , y otro que anula QQ' , que serán evidentemente distintos, porque la parte $5\delta^3 - 2\delta$ es común á las dos expresiones, y los denominadores de $4\delta^3 - 3$ son distintos. Desde $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ hasta $\delta = \infty$ ambas ordenadas son siempre positivas, y crecen indefinidamente.

De manera que PP' y QQ' sólo se anulan para valores de δ comprendidos entre $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt{\frac{3}{4}}$, pero vamos á demostrar que cada una de estas ordenadas solamente se reduce á cero una vez. En efecto, γ_{k-1} ó γ_{n-k} pueden representarse por una expresión de la forma $F + G\delta$ en que F y G son cantidades positivas y sus valores menores corresponden á $k=2$, que da $\gamma_1 = 3 + 2\delta$. De manera que las ordenadas PP' y QQ' se reducirán á cero si

$$(3\delta^3 - 2\delta)(F + G\delta) + 4\delta^3 - 3 = 0$$

ó sea

$$3G\delta^4 + 3F\delta^3 - 2(G-2)\delta^2 - F\delta - 3 = 0$$

en que $G-2$ es siempre igual ó mayor que cero.

Esta ecuación de cuarto grado en δ no podrá tener más que una raíz positiva, porque en virtud de la regla de signos de Descartes, el número de aquellas no puede exceder al de variaciones, y la ecuación solamente tiene una, de manera que la parábola de los momentos de la carga permanente corta al eje de las x en los puntos P y Q tan sólo para un valor de δ para cada uno de ellos. Por lo demás, el correspondiente al primero será mayor que el del segundo, porque como $\gamma_{n-k} > \gamma_{k-1}$, sustituyéndolo en la segunda ecuación (69) dará un resultado positivo; por consiguiente, la raíz deberá estar comprendida entre aquel valor y $\sqrt{\frac{2}{3}}$, y ser por lo tanto menor la cantidad δ que anula QQ' que la que reduce á cero PP' .

Para los tramos de orden impar, aplicando las fórmulas (69 bis) y dando á δ diferentes valores, obtendremos los resultados siguientes:

$$\delta = 0 : \dots\dots\dots PP' = -\frac{1}{4\gamma_{k-1}^2} < 0$$

$$QQ' = -\frac{1}{4\gamma_{n-k}^2} < 0$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 \quad PP' = -\frac{1}{36\gamma_{k-1}^2} < 0$$

$$QQ' = -\frac{1}{36\gamma_{n-k}^2} < 0$$

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866 \quad PP' = -\frac{\delta}{48\gamma_{k-1}} < 0$$

$$QQ' = -\frac{\delta}{48\gamma_{n-k}} < 0$$

$$\delta = 1, \dots\dots\dots PP' = \frac{1}{12\gamma_{k-1}} \left(-1 + \frac{1}{\gamma_{k-1}} \right) < 0 \quad QQ' = \frac{1}{12\gamma_{n-k}} \left(-1 + \frac{1}{\gamma_{n-k}} \right) < 0$$

$$\delta = \infty, \dots\dots\dots PP' = -\infty \quad QQ' = -\infty,$$

resultados que son todos negativos. Pero observemos que entre $\delta = 0$ y $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $1 - (5\delta^3 - 2\delta)$ será positivo, y de signo contrario la segunda parte, tanto de PP' como de QQ' . El máximo de $5\delta^3 - 2\delta$ corresponde á $9\delta^2 - 2 = 0$, que da $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$; y sustituyéndolo en las ordenadas de los puntos P y Q ,

se ve fácilmente que ambos resultados son positivos; por consiguiente las ecuaciones que se obtienen igualándolas á cero tienen dos raíces positivas comprendidas entre $\delta = 0$ y $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, y además, no pueden tener más que dos, porque éste es el número de variaciones de signo de ambas ecuaciones. No habiendo ninguna raíz positiva mayor que $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, claro está que las ordenadas PP' y QQ' correspondientes á valores de δ mayores que aquella cantidad, deberán ser siempre negativas.

De la misma manera que para los tramos de orden par, reconoceríamos que las dos raíces correspondientes á QQ' = 0 comprenden á las de PP' = 0, es decir, que la menor de ellas es inferior á los dos valores que anulan PP', y la mayor es superior.

59. *Propiedad notable de las parábolas de la carga permanente.*—La expresión (67) del número 56, que nos da también el momento de flexión en un punto cualquiera de la viga, puede ponerse bajo la forma

$$M_k(x) = \pm \frac{(3\delta^3 - 2\delta)(C_{m-k+1}l - 6A_{m-k}x)}{12\gamma_m} pl + \frac{1}{12} pl^3 - \frac{1}{2} px(l-x)$$

en que el primer término se anula de dos maneras, á saber: siendo

$$3\delta^3 - 2\delta = 0 \text{ que da } \delta = 0 \text{ ó } \delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

y

$$C_{m-k+1}l - 6A_{m-k}x = 0 \text{ que da } x = \frac{C_{m-k+1}l}{6A_{m-k}}$$

El resto del valor de $M_k(x)$ es la expresión del momento en una viga de longitud l empotrada en sus dos extremidades, cuyo resultado lo conocíamos ya para los valores $\delta = 0$ y $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$; pero la segunda ecuación nos ha conducido á una propiedad muy singular de las parábolas de la carga permanente

(tampoco conocida), y es que en cada tramo hay un punto determinado por $x = \frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}} l < l$

(excepto para el tramo central, que da $x = \infty$) en que la ordenada es constante, cualquiera que sea el valor de δ , y es la misma que correspondería si el tramo estuviese cortado y empotrado en sus extremidades, y cargado del peso p por metro lineal. De manera si en los dos apoyos del tramo de orden k tomamos las ordenadas iguales á $\frac{1}{12} pl^3$, trazamos la parábola de los momentos aplicando la plantilla,

la, y se levanta una perpendicular en el punto cuya abscisa es $\frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}} l$, la intersección con la

curva de los momentos en el caso del empotramiento, nos determinará el punto común á todas las parábolas correspondiente á dicho tramo para la carga permanente, cualquiera que sea el valor de δ .

Además, este punto no sólo es común para todas las parábolas en una viga de n tramos, sino que es el mismo, cualquiera que sea este número para tramos equidistantes del centro de la viga, puesto que los valores de $m - k = \frac{n - 2k}{2} - \frac{1}{2}$ serán iguales.

Examinemos ahora la situación de este punto, y para esto recordemos que la abscisa de otro que gozaba una propiedad parecida, pero no igual para la carga aislada número 29, estaba dada por

$\frac{C_{n-2k+1}}{6A_{n-2k}}$, y tenemos

$$\frac{C_{m-k+1}}{6A_{m-k}} = \frac{1}{1 + \frac{C_{m-k}}{C_{m-k+1}}} \quad \text{y} \quad \frac{C_{n-2k+1}}{6A_{n-2k}} = \frac{1}{1 + \frac{C_{n-2k}}{C_{n-2k+1}}}$$

cuyas cantidades difieren muy poco; pero la primera es mayor que la segunda, porque $\frac{C_{m-k}}{C_{m-k+1}} < \frac{C_{n-2k}}{C_{n-2k+1}}$, puesto que $n-2k > m-k$, y como, según probamos en el número 29, $\frac{C_{n-2k}}{C_{n-2k+1}}$ es mayor que la abscisa MQ , *à fortiori* estará comprendido entre Q y N el punto común de las parábolas de la carga permanente en cada tramo, que lo designaremos por T' (Fig. 7.^a).

Si queremos hallar la diferencia entre las abscisas MT y MQ , tendremos

$$\frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} l - \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l = \frac{C_{m-k+1} \alpha_{n-k+1} - C_{m-k} \alpha_{n-k}}{6 A_{m-k} \gamma_{n-k}} l$$

pero en virtud de la segunda relación del grupo (59)

$$C_{m-k+1} \alpha_{n-k+1} = \frac{\beta_{3m-2k+2} - \beta_{m-1}}{2}$$

$$C_{m-k} \alpha_{n-k} = \frac{\beta_{3m-2k+2} - \beta_{m+1}}{2}$$

luego

$$MT - MQ = \frac{\beta_{m+1} - \beta_{m-1}}{12 A_{m-k} \gamma_{n-k}} l = + \frac{\gamma_m}{6 A_{m-k} \gamma_{n-k}} l$$

Vamos ahora á determinar la ordenada TT' , para lo cual sustituiremos en la expresión de $M_k(x)$ la abscisa x por $\frac{C_{m-k+1}}{6 A_{m-k}} l$; y como se anula el primer término, quedará

$$\begin{aligned} M_k(x) &= \frac{1}{12} p l^2 - \frac{1}{2} p x (l-x) = \\ &= p l^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{A_{m-k} + A_{m-k+1}}{12 A_{m-k}} + \frac{C_{m-k+1}^2}{72 A_{m-k}^2} \right) = \frac{C_{m-k+1}^2 - 6 A_{m-k} A_{m-k+1}}{72 A_{m-k}^2} p l^2 = \frac{1}{72 A_{m-k}^2} p l^2; \quad (71) \end{aligned}$$

Resulta, por consiguiente, que el punto T' , común á las parábolas en cada tramo k , tiene siempre una ordenada positiva y en general muy pequeña, lo que nos indica que una de las intersecciones de dicha curva con el eje de las x ó el vértice de la parábola, deben estar próximas del punto T' . En el tramo central $A_{m-k} = 0$, y por lo tanto, $TT' = \infty$, mientras que en otro distante del central, por ejemplo, en cuatro unidades, tendremos

$$TT' = \frac{1}{72 \times 56^2} p l^2 = 0,000004 p l^2$$

que es una cantidad inapreciable, y podrá tomarse como nulo el momento en dicho punto, y con mayor razón en los apoyos más próximos á las extremidades de la viga.

Esta propiedad nos da á conocer de una vez para siempre la posición de un punto de la parábola de la carga permanente en cada tramo, con la particularidad que si de una viga de 9 tramos, por ejemplo, pasamos á otra de 11, aquellos puntos serán comunes en los 7 tramos centrales. Además, sabemos que las parábolas son todas iguales á la determinada por $y = \frac{1}{2} p x^2$ y que sus ejes son siempre verticales; pero no basta el punto T' para conocerlas, sino que hacen falta dos en cada tramo, excepto el

central, en que basta con uno á causa de la simetría; pero siendo $T T' = \infty$, en este caso nos encontramos con la misma dificultad.

Para fijar la posición de otro punto, lo más conveniente es calcular en cada tramo la ordenada $P P'$, y aún basta hallarla en un solo tramo, por ejemplo, el central, ó si se quiere, el momento del apoyo contiguo al centro, cuya ordenada está dada por

$$M_{m+1} = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 \pm \frac{3\delta^2 - 2\delta}{\gamma_m} \right)$$

y conociendo este punto y aplicando la plantilla de modo que el eje de la parábola pase por el centro de la viga, podremos trazar la curva de los momentos en aquel tramo. Para los inmediatos conocemos ya dos puntos, y con la misma plantilla se trazarán de nuevo las parábolas, y así sucesivamente hasta el primero y último tramo, en que esta curva deberá pasar por las extremidades de la viga.

40. *Ordenada en el centro del tramo y situación del eje de la parábola.* Vamos á determinar también la ordenada de esta curva en el punto medio de un tramo cualquiera, para lo cual harémos $x = \frac{l}{2}$ en la expresión de $M_k(x)$, que nos da

$$\begin{aligned} M_k(x) &= \pm \frac{(3\delta^2 - 2\delta)(C_{m-k+1} - 3A_{m-k})}{12\gamma_m} p l^2 - \frac{1}{24} p l^2 = \\ &= \pm \frac{(3\delta^2 - 2\delta)E_{m-k}}{12\gamma_m} p l^2 - \frac{1}{24} p l^2 \quad (72) \end{aligned}$$

Ahora bien, si sustituimos los valores de δ comprendidos entre cero y $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $3\delta^2 - 2\delta$ será menor que la unidad, y

$$\frac{E_{m-k}}{\gamma_m} = \frac{E_{m-k}}{3B_{m-1} + 2C_{m-1}\delta} < \frac{E_{m-k}}{3B_{m-1}} < \frac{1}{3},$$

de manera que el primer término será menor que $\frac{1}{24} p l^2$, y por lo tanto en los tramos de orden par las ordenadas de las parábolas de los momentos en el centro de cada tramo serán negativas hasta $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, y después pasarán por cero, y crecerán indefinidamente hasta $+\infty$, mientras que en los tramos de orden impar serán siempre negativas, llegando en el límite á $-\infty$.

Para pasar á examinar las diversas posiciones del eje de la parábola, recordaremos que su abscisa está dada por

$$\frac{T_k}{p} = \frac{1}{2} \pm \left(1 \pm \frac{(3\delta^2 - 2\delta)A_{m-k}}{\gamma_m} \right) l$$

que según vimos allí sufre alteraciones análogas que el momento M_k . A esto añadiremos que desde

$$\delta = 0 \text{ á } \delta = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ como } \frac{(3\delta^2 - 2\delta)A_{m-k}}{\gamma_m} < 1$$

el eje de la parábola estará comprendido en la primera mitad del tramo, y aún hasta $\delta = 1$, no podrá salirse de la longitud del mismo, alejándose luego cada vez más hasta el infinito, hacia la derecha para los tramos pares, y á la izquierda para los impares.

41. *Posiciones diversas de la parábola de los momentos.* — Conocidas ya las alteraciones que sufren, á medida que varía δ , las ordenadas de varios puntos de esta curva, á saber, de las extremidades del tramo, de los puntos P, Q y T y del centro del mismo, vamos á resumir cuanto antecede para determinar las posiciones distintas que puede ocupar la parábola (que sabemos que es siempre la misma) respecto de los mencionados puntos.

Supongamos, en primer lugar, que se trata de un tramo de orden par, y fijemos (*Fig. 8.^a*) los seis puntos M, P, O, Q, T y N. Ya sabemos que la ordenada T T', así como la abscisa MT son constantes, de manera que para determinar las diversas posiciones de la parábola basta hacer que uno de sus puntos recorra las ordenadas del apoyo M, por ejemplo, mientras que otro pasa siempre por T'. Ahora bien, para $\delta = 0$ la parábola ocupará la posición designada en la figura 8.^a por el número 1, que es la que correspondería también al tramo cortado y empotrado en sus extremidades. A medida que δ aumenta, el momento del punto M decrece hasta el límite marcado con el número 2, y sigue después recuperando las posiciones anteriores hasta $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, en que la parábola se confunde con la correspondiente á $\delta = 0$.

En el intervalo que hemos examinado hasta ahora, las ordenadas de los puntos P, O y Q conservan los mismos signos; pero á medida que δ aumenta, á partir de $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, el momento en M crece indefinidamente, la ordenada del punto Q se anula (curva núm. 4), y después la P (núm. 5), que á su vez crecen también indefinidamente. Mientras P y Q pasan por cero, que es para valores de δ menores que $\sqrt{\frac{2}{3}}$, la ordenada del punto N se conserva positiva y decreciente desde $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, se anula para un valor de δ siempre mayor que la unidad (entre la núm. 8 y 9), y crece después hasta el infinito negativo, convirtiéndose en el límite en la vertical tirada por el punto T y designada por el número 10.

En esta discusión nos queda solamente una duda, y es, si entre la curva núm. 6 y la núm. 8, que ambas cortan al eje de las x , habrá otra tal como la núm. 7, cuyas intersecciones estén dadas por raíces imaginarias. Para cerciorarnos de esto observemos que la distancia del eje de la parábola al punto M está dada por $\frac{T_k}{p}$, y que según se deduce de su valor dado en el número anterior para $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ es igual á $\frac{1}{2} l$, y después crece indefinidamente. Por consiguiente, el eje de la parábola recorrerá todas las posiciones á la derecha del punto O, y por lo tanto en una de ellas pasará por T, y como la ordenada de este punto es siempre constante y positiva, resulta que la curva no podrá cortar al eje de las x en esta posición ni en las inmediatas.

Para que no haya motivo alguno de confusión en la precedente discusión debemos advertir que de los seis puntos señalados en la figura 8.^a, en el eje MN, hay dos, á saber, el P y Q, cuya posición varía con δ ; pero según vimos en el número 27, estas alteraciones son muy pequeñas, y en atención, además, á que esta circunstancia no cambia en lo más mínimo los razonamientos anteriores, hemos preferido, á fin de no complicar la citada figura, considerar también como puntos fijos el P y Q, y además se ha exagerado la ordenada T T'.

Para los tramos de orden impar podemos hacer una discusión análoga (*Fig. 9.^a*). Partiendo de la posición señalada por el número 1, que corresponde á $\delta = 0$, la ordenada del punto M empieza á crecer, y pasan por cero sucesivamente las de los puntos Q y P, llegando al límite designado por la parábola número 4, para descender nuevamente, ocupando las posiciones anteriores hasta la 5, correspondiente á $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, que se confunde con la 1, desde la cual disminuye indefinidamente la ordenada del punto M, pasando por cero en la parábola número 6, y llegando al límite, ó sea la vertical del punto T. Además, las intersecciones de estas diversas curvas con el eje de las x no pueden ser nunca imaginarias para los tramos de orden impar, porque siendo siempre negativas las ordenadas del punto O, y positivas las del T, habrá forzosamente una intersección entre ambos puntos, y la otra necesariamente por la simetría de la parábola respecto de su eje.

Queda, pues, terminada la discusión completa de las parábolas de los momentos producidos por la carga permanente, y que nos ha de servir en el capítulo siguiente para el estudio de las líneas envolventes. Por otra parte, la marcha que hemos seguido para este estudio, fundada en la determinación de las ordenadas de varios puntos notables de la curva correspondiente á cada tramo, es mucho más sencilla que si hubiésemos empezado por calcular las raíces de la ecuación $M_k(x) = 0$, que estando dadas por expresiones bastante complicadas, hubiesen dificultado la discusión, sin conducirnos á todas las consecuencias que hemos obtenido en las consideraciones precedentes.

(Se continuará.)

PABLO DE ALZOLA.