AÑO XVIII
DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO VIII
DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID, 15 DE OCTUBRE DE 1870.

TOMO XVIII. NÚM. 20.

TEORÍA
DEL
CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Continuacion.*)

32. *Trasformacion de la fórmula de los esfuerzos trasversales en los apoyos.*—Podriamos, partiendo de la fórmula general (10), seguir una marcha análoga que para los momentos, á fin de simplificar igualmente aquella expresion; pero es inútil proceder de este modo, puesto que llegarémos con más brevedad al mismo resultado partiendo de las fórmulas trasformadas de los momentos y sustituyéndolas en la relacion (1)

$$T_k = \frac{M_k - M_{k+1}}{l} + \frac{1}{2} p\, l$$

y como

$$M_k = \frac{1}{12}\, p\, l^2 \left(1 \pm \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, C_{m-k+1}}{\gamma_m}\right)$$

y

$$M_{k+1} = \frac{1}{12} p\, l^2 \left(1 \mp \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, C_{m-k}}{\gamma_m}\right)$$

tendrémos

$$T_k = \frac{1}{2} p\, l \pm \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, 6\, A_{m-k}}{12\,(3\,B_{m-1} + 2\,C_{m-1}\,\delta)} = \frac{1}{2} p\, l \left(1 \pm \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, A_{m-k}}{3 B_{m-1} + 2\,C_{m-1}\,\delta}\right) \qquad (65)$$

segun que k sea par ó impar.

Para el primer apoyo y el central tendrémos respectivamente:

$$T_1 = \frac{1}{12} p\, l \left(5 - \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, C_{m-1}}{3 B_{m-1} + 2\, C_{m-1}\,\delta}\right) \;\text{ y }\; T_{m+1} = \frac{1}{2} p\, l.$$

Simplificadas de esta manera las expresiones generales de los momentos y esfuerzos trasversales en los puntos de apoyo, vamos á pasar á estudiar las alteraciones que experimentan estos valores, de la misma manera que lo hicimos en el capítulo anterior para las expresiones análogas relativas á la sobrecarga de un solo tramo.

§ 2.º—Discusion de las fórmulas deducidas en el párrafo precedente.

33. *Variaciones de los momentos y esfuerzos trasversales de los apoyos.*— La expresion general que hemos obtenido para M_k es

$$M_k = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 \pm \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, C_{m-k+1}}{3\, B_{m-1} + 2\, C_{m-1}\,\delta}\right)$$

y vamos á examinar las alteraciones que experimenta á medida que δ crece desde cero á infinito.

Para esto observarémos que el primer término es constante, pero como en el segundo aumentan simultáneamente el numerador y el denominador, y áun cambia de signo el primero de estos dos para el valor de $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, á fin de darnos cuenta de las alteraciones que sufre M_k es preciso hallar su derivada, cuyo signo positivo ó negativo nos indicará si el momento es creciente ó decreciente.

Ahora bien, el numerador de la derivada es

$$\pm\,(12\, C_{m-1}\,\delta^3 + 27\, B_{m-1}\,\delta^2 - 6\, B_{m-1})\, C_{m-k+1}$$

segun que k sea de órden par ó impar y su signo será el mismo que el de

$$\pm\,(4\, C_{m-1}\,\delta^3 + B_{m-1}\,(9\,\delta^2 - 2)).$$

La cantidad que está dentro del paréntesis da un resultado negativo para $\delta = o$, y positivo para $\delta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, y á partir de este valor crece indefinidamente, de manera que las raíces positivas de la ecuacion que se obtiene igualando á cero aquella expresion, solamente podrán estar comprendidas entre cero y $\frac{\sqrt{2}}{3}$ y ademas deberán ser en número impar, puesto que los dos límites de la variable que las comprenden dan, sustituidos en la ecuacion, resultados de signos contrarios. Pero aquélla es de tercer grado, de manera que deberá tener una ó tres raíces positivas, y como esto último no es posible, porque la suma de todas las raíces de la ecuacion, que debe ser igual y de signo contrario al coeficiente de la variable elevada á la primera potencia, resultaria negativa, miéntras que es cero, porque no hay término en δ, de modo que queda demostrado que sólo hay una raíz positiva y que está comprendida entre $\delta = o$ y $\delta = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Por consiguiente la expresion general del momento de flexion de un apoyo de órden par, que toma un valor positivo para $\delta = o$, disminuye hasta un cierto valor $\delta < \frac{\sqrt{2}}{3}$ y aumenta despues hasta infinito cuando δ llega al mismo límite. Ademas, M_k se conserva siempre positivo, porque en el factor

$$1 - (2\,\delta - 3\,\delta^3) \times \frac{C_{m-k+1}}{\gamma_m}$$

el segundo término será necesariamente menor que el primero para el valor de δ correspondiente al mínimo de M_k, puesto que siendo $\delta < \frac{\sqrt{2}}{3}$ y *à fortiori* menor que $\frac{1}{2}$, $2\,\delta - 3\,\delta^3$ será menor que la unidad, y como en el factor $\frac{C_{m-k+1}}{\gamma_m}$ es siempre menor el numerador que el denominador, resulta que el producto de ambos factores será tambien menor que uno, y por lo tanto M_k siempre positivo.

Si suponemos ahora que k sea impar, el momento será tambien positivo para $\delta = o$, aumentará hasta llegar al máximo y decrecerá luégo indefinidamente, pero tomando valores negativos hasta $\delta = \infty$ quedará para $M_k = -\infty$, y por lo tanto, deberá pasar por cero; de manera que hay siempre algun valor de δ que reduzca á cero cada uno de los momentos de los apoyos de órden impar; pero, como se ve por la expresion anterior, corresponde siempre á $\delta > 1$. Á estas consideraciones añadirémos que siendo independiente de k la derivada que ántes hemos hallado, el valor de δ que la reduzca á cero y que corresponde al máximo positivo de los momentos de órden par y al negativo de los demas, será comun á todos los tramos, y dependiente tan sólo del número n de los que tiene la viga.

La expresion general del esfuerzo trasversal (65) es

$$T_k = \frac{1}{2} p\, l \left(1 + \frac{(3\,\delta^3 - 2\,\delta)\, A_{m-k}}{\gamma_m}\right)$$

tiene una forma enteramente análoga á la del momento M_k, de manera que los razonamientos que hemos hecho para deducir las variaciones de aquella fórmula, pueden aplicarse igualmente para T_k y llegaríamos á las mismas conclusiones, debiendo añadir que son tambien iguales los valores de δ correspondientes al máximo positivo ó negativo de T_k, segun el órden del apoyo.

Pasemos ahora á estudiar varios casos particulares, que corresponden á diversos valores de δ.

54. *Casos en que los momentos de los apoyos son iguales.*—La fórmula general del momento

$$M_k = \frac{1}{12} p\, l^2 \left(1 \pm \frac{\delta\,(3\,\delta^2 - 2)\, C_{m-k+1}}{\gamma_m}\right)$$

consta de dos términos, el primero constante y el segundo variable con δ; de manera que todos los momentos serán iguales para los valores de δ que reduzcan á cero el segundo término y que son dos, á saber: $\delta = 0$ y $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}81649$, que harán $M_k = \frac{1}{12} pl^2$.

El valor de $\delta = 0$ se refiere á una viga de tramos iguales empotrada en sus dos extremidades, y como en este caso $k = 2$ corresponde al primer apoyo y no al segundo, resulta que los momentos serán iguales en todos los puntos de apoyo, miéntras que para $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ se exceptúan los dos extremos en que los momentos son necesariamente iguales á cero por estar apoyada la viga en dichos puntos.

Los valores de M_k son iguales á $\frac{1}{12} pl^2$, y como un tramo aislado empotrado en sus extremidades da estos mismos momentos, resulta que una viga de cualquier número de tramos iguales, empotrada en sus extremos, ú otra simplemente apoyada y en que el primero y el último sean iguales á $l\sqrt{\frac{2}{3}}$, obran para la carga permanente lo mismo que si estuviesen separados los tramos, y cada uno de ellos empotrado en sus extremidades.

Claro está que siendo iguales los momentos de flexion en los apoyos, deberán serlo tambien los esfuerzos trasversales; y efectivamente, sustituyendo aquellos dos valores de δ en la fórmula general (65) resulta $T_k = \frac{1}{2} p\, l$ para todos los puntos de apoyo en el caso en que la viga esté empotrada en sus extremidades, y con excepcion del primero y último para $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En este caso T está dado, como hemos visto en el número 21, por

$$T_1 = \frac{1}{2} p\, l\, \delta - \frac{M_2}{l\,\delta} = 0{,}306\, p\, l$$

que difiere en 0,195 $p\, l$ del valor correspondiente á los demas apoyos.

Las reacciones están determinadas por

$$R_k = \frac{6\, M_k}{l} + \frac{1}{2} p\, l = p\, l$$

y $R_1 = T_1 = \frac{1}{2}\, p\, l$ para los extremos si $\delta = o$, y cuando $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ tambien $p\, l$, exceptuando $R_1 = T_1 = 0{,}306\, p\, l$ y

$$R_2 = T_2 - T_1 + p\, l\, \delta = (0{,}50 - 0{,}306)\, p\, l + 0{,}816\, p\, l = 1{,}010\, p\, l$$

Por consiguiente, estos dos valores de δ ejercen respecto de la carga permanente el mismo papel que $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para la carga aislada, y ofrecen tambien las mismas ventajas, y como la diferencia entre $\sqrt{\frac{3}{4}}\, l - \sqrt{\frac{2}{3}}\, l = 0{,}050\, l = \frac{l}{20}$, resulta que se aproximan mucho ambos valores de δ, de manera que pueden conseguirse simultáneamente las ventajas que uno y otro proporcionan para la sobrecarga de un solo tramo y para la carga permanente de la viga.

35. *Caso en que todos los tramos son iguales.*—Haciendo $\delta = 1$ en la fórmula general del momento (64) del número 31 se convierte en

$$M_k = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 \pm \frac{C_{m-k+1}}{C_m}\right).$$

cuya fórmula es bien sencilla, pues se reduce á hallar los cocientes de la division de dos números de la serie C.

Si hacemos $k = 2$ y $k = m + 1$, tendrémos

$$M_2 = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 + \frac{C_{m-1}}{C_m}\right) \quad \text{y} \quad M_{m+1} = \frac{1}{12} p l^2 \left(1 \pm \frac{1}{C_m}\right)$$

del mismo modo deducimos para los esfuerzos trasversales

$$T_k = \frac{1}{2} p l \left(1 \pm \frac{A_{m-k}}{C_m}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} p l \left(1 + \frac{A_{m-2}}{C_m}\right) \quad \text{y} \quad T_{m+1} = \frac{1}{2} p l$$

Para hallar T_1, ó sea el esfuerzo trasversal en el primer apoyo, tendrémos

$$T_1 = \frac{1}{2} p l - \frac{M_2}{l} = \frac{1}{2} p l \left(1 - \frac{A_{m-1}}{C_m}\right) = \frac{1}{2} p l \frac{A_m}{C_m}$$

de manera que áun este valor sigue la misma ley de formacion que los correspondientes á los demas términos.

Las reacciones de los apoyos están dadas por la expresion $R_k = \frac{6\, M_k}{l}$ áun para el segundo apoyo, y con la sola excepcion de las extremidades de la viga, en las que, como sabemos, $R_1 = T_1$.

§ 3.º—**Momento de flexion y esfuerzo trasversal en un punto cualquiera distinto de los apoyos.**

36. *Parábola de los momentos producidos por la carga permanente.*—La ecuacion de esta curva es, segun sabemos,

$$M_k(x) = M_k - T_k\, x + \frac{1}{2} p x^2$$

y sustituyendo por M_k y E_k sus expresiones generales (5) y (10), tendrémos

$$M_k(x) = \frac{(\pm \delta^3 \mp \beta_1 \pm \cdots\cdots + \beta_{k-2})\,(\alpha_{n-k}\, l - \gamma_{n-k}\, x)}{4\, D} \times p l +$$

$$+\frac{(\beta_{n-k}-\beta_{n-k-1}+\cdots\cdots\pm\beta_1\mp\delta^3)\,(\alpha_{k-2}\,l-\gamma_{k-1}\,x)}{4\,D}\times p\,l-\frac{1}{4}\,p\,l\,x+\frac{1}{2}\,p\,x^2 \qquad (66)$$

Las ordenadas de esta curva M′ P′ Q′ N′ se obtienen por la suma de dos rectas R S y U V (*Figura* 7.ª) del 1.° y 2.° término y la parábola M p o tambien en idéntica situacion que la que nos sirvió para determinar la debida á la carga aislada dada por $-\frac{1}{2}\,p\,x\left(\frac{l}{2}-x\right)$.

Y si empleamos las fórmulas simplificadas (63), (64) y (65)

$$M_k\,(x)=\frac{1}{12}\,p\,l^2\left(1\pm\frac{(3\,\delta^3-2\,\delta)\,C_{m-k+1}}{\gamma_m}\right)-\frac{1}{2}\,p\,l\left(1\pm\frac{(3\,\delta^3-2\,\delta)\,A_{m-k}}{\gamma_m}\right)x+\frac{1}{2}\,p\,x^2 \qquad (67)$$

Ya hemos examinado en el párrafo anterior las alteraciones que sufren en cada tramo los dos puntos extremos á medida que varía δ, y vamos ahora á estudiar algunas otras particularidades de esta curva.

37. *Ordenadas de la parábola en los puntos de interseccion de las rectas de los momentos de flexion.*— Para hallar las ordenadas PP′ y QQ′ (de la misma figura) harémos respectivamente $x=\frac{\alpha_{k-2}\,l}{\gamma_{k-1}}$ y $x=\frac{\alpha_{k-k}\,l}{\gamma_{n-k}}$ en la expresion (66), y tendrémos para la primera, recordando la del núm. 10,

$$PP'=\frac{(\pm\,\delta^3\mp\beta_1\pm\cdots\cdots+\beta_{k-2})}{4\,\gamma_{k-1}}\,p\,l^2-\frac{1}{4}\,\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}}\,p\,l^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}}\right)^2 p\,l^2$$

Supongamos en primer lugar que se trata de un tramo de órden par, y como

$$-\beta_1+\beta_2\cdots\cdots+\beta_{k-2}=\frac{\Sigma_{k-2}-2\,\delta}{3}$$

resulta sustituyendo

$$PP'=\left[\frac{3\,\delta^3-2\,\delta}{12\,\gamma_{k-1}}-\frac{\gamma_{k-2}}{12\,\gamma_{k-1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}}\right)^2\right]p\,l^2$$

pero

$$6\,\alpha_{k-2}^2-\gamma_{k-1}\,\gamma_{k-2}=\alpha_{k-3}^2-\alpha_{k-4}\,\alpha_{k-2}=4\,\delta^2-3 \qquad \text{(29) del número 13,}$$

de manera que

$$PP'=\frac{1}{12\,\gamma_{k-1}}\left(3\,\delta^3-2\,\delta+\frac{4\,\delta^2-3}{\gamma_{k-1}}\right)p\,l^2 \qquad (68)$$

cantidad independiente del número de tramos, lo cual nos prueba que estas ordenadas serán iguales en dos vigas cualesquiera, para los mismos valores de δ y tramos equidistantes de la extremidad más próxima, y siguiendo la misma marcha, se deduce para $x=\frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}}\,l$.

$$QQ'=\frac{1}{12\,\gamma_{n-k}}\left(3\,\delta^3-2\,\delta+\frac{4\,\delta^2-3}{\gamma_{n-k}}\right)p\,l^2 \qquad (69)$$

que es tambien constante para tramos equidistantes de la extremidad más lejana.

(*Se continuará.*)

PABLO DE ALZOLA.