AÑO XVIII
DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO VIII
DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID, 15 DE SETIEMBRE DE 1870.

TOMO XVIII. NÚM. 18.

TEORÍA
DEL
CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Continuacion.*)

Supongamos ahora que la viga tenga un número infinito de tramos. El segundo término de M_k se reducirá á cero, y quedará

$$M_k = \text{límite}\ \frac{C_{n-1}}{24\,A_{n-1}}\ \text{para}\ n = \infty$$

pero

$$\frac{C_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{A_{n-1} + A_{n-2}}{A_{n-1}} = 1 + \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}$$

$$\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} = \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \ddots}}}$$

y para hallar el valor de esta fraccion continua periódica en el límite, que deberá ser la raíz de una ecuacion de segundo grado de coeficientes racionales, llamémosla x, y tendrémos

$$x = \frac{1}{4-x};\ \text{ó sea}\ x^2 - 4\,x - 1 = 0\ \text{que da}\ x = 2 \pm \sqrt{3},$$

siendo la segunda solucion la que corresponde al límite de $\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}$, puesto que ha de ser necesariamente menor que la unidad. Por consiguiente, cuando la viga tiene infinitos tramos, todos los momentos son iguales á $\frac{3-\sqrt{3}}{24}\,p\,l^2$, lo cual habiamos previsto ya en el núm. 22; de manera que sin necesidad de haber procedido directamente á la determinacion del límite de la relacion $\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}$, sabiamos que se obtendria $2 - \sqrt{3}$. Debemos ademas observar que la relacion de dos términos consecutivos de cualquiera de las series, áun de las que dependen de δ, ó sean las de los números 13 y 14, nos conduciria siempre al mismo límite, porque se desarrollan en fracciones contínuas idénticas á la anterior.

Pasando ahora á los esfuerzos trasversales, tendrémos, haciendo tambien $\delta = 1$ en la expresion (58),

$$T_k = \frac{1}{2} p\,l - \frac{A_{n-2\,k}}{4\,A_{n-1}} p\,l \qquad (62)$$

y para $k = 1$ y $k = m + 1$ nos dará

$$T_1 = \frac{1}{2} p\,l - \frac{A_{n-2}}{4\,A_{n-1}} p\,l; \quad y \quad T_{m+1} = \frac{1}{2} p\,l - \frac{A_{-1}}{4\,A_{n-1}} p\,l = \frac{1}{2} p\,l$$

Si la viga tiene infinitos tramos $T_k = \frac{1}{2} p\,l$, lo mismo que S_{k+1}, como debia suceder, puesto que los valores que dedujimos para $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eran estos mismos, é independientes del número de tramos.

25. *Caso en que siendo iguales todos los tramos, está la viga empotrada en sus extremidades.*—Para introducir esta hipótesis basta suponer en las fórmulas generales que $\delta = o$, puesto que si se supone que el primer tramo vaya decreciendo hasta este límite, la tangente al eje neutro de la misma, ó á la elástica, será horizontal en las dos extremidades, que es la condicion del empotramiento.

Al hacer $\delta = o$ la viga tendrá solamente $n - 2$ tramos, de manera que para que las fórmulas correspondientes á este caso puedan compararse á las de la viga de $n + 1$ apoyos, cambiarémos n en $n + 2$ y k en $k + 1$, en la fórmula (54), que se convertirá para $\delta = o$ en

$$M_k = -\frac{C_{n-1} - C_{n-2\,k+1}}{24\,A_{n-1}} p\,l^2 + \frac{C_{n-1}}{12\,A_{n-1}} p\,l^2 = \frac{C_{n-1} + C_{n-2\,k+1}}{24\,A_{n-1}} p\,l^2$$

que para $k = 1$ y $k = m + 1$

$$M_k = \frac{C_{n-1}}{12\,A_{n-1}} p\,l^2 \ \text{y} \ M_{m+1} = \frac{C_{n-1} + 1}{24\,A_{n-1}} p\,l^2$$

y del mismo modo tendrémos

$$N_{k+1} = -\frac{C_{n-1} + C_{n-2\,k}}{24\,A_{n-1}} p\,l^2 + \frac{C_{n-1}}{12\,A_{n-1}} p\,l^2 = \frac{C_{n-1} - C_{n-2\,k}}{24\,A_{n-1}} p\,l^2$$

$$M_2 = \frac{C_{n-1} - C_{n-2}}{24\,A_{n-1}} p\,l^2 = \frac{E_{n-2}}{12\,A_{n-1}} p\,l^2 \ \text{y} \ N_{m+2} = \frac{C_{n-1} + 1}{24\,A_{n-1}} p\,l^2$$

Si comparamos los valores de M_k y N_{k+1} con los correspondientes al caso en que la viga está apoyada en sus extremidades, observarémos que sólo difieren en el signo de los segundos términos, de manera que la semisuma de ambos es siempre constante é igual á $\frac{C_{n-1}}{24\,A_{n-1}}$. En cada tramo, el momento del apoyo más próximo á la extremidad de la viga es mayor para el caso del empotramiento, y por el contrario, el otro es menor.

El esfuerzo trasversal está dado por

$$T_k = \frac{1}{2} p\,l + \frac{A_{n-2\,k}}{4\,A_{n-1}} p\,l$$

que sumando con el relativo á la viga apoyada da pl.

26. *Caso en que δ es ∞.*—Demostramos en el número 20 que M_k decrece cuando δ varia desde cero á infinito, y que N_{k+1}, por la inversa, aumenta, y vamos á determinar los límites

$$M_k = \frac{(C_{n-3} - C_{n-2k+1})\left(4 - \frac{3}{\delta^2}\right)}{24\left(4 A_{n-3} + \frac{4 E_{n-3}}{\delta} + \frac{3 A_{n-3}}{\delta^2}\right)} p l^2 + \frac{\frac{C_{n-3}}{\delta^2} + \frac{2 A_{n-3}}{\delta}}{4\left(4 A_{n-3} + \frac{4 E_{n-3}}{\delta} + \frac{3 A_{n-3}}{\delta^2}\right)} p l^2$$

y haciendo $\delta = \infty$

$$M_k = \frac{C_{n-3} - C_{n-2k+1}}{24 A_{n-3}} p l^2$$

$$N_{k+1} = \frac{C_{n-3} + C_{n-2k}}{24 A_{n-3}} p l^2$$

$$T_k = \frac{1}{2} p l - \frac{A_{n-2k}}{4 A_{n-1}} p l$$

que sólo difieren en los signos de los segundos términos de los valores correspondientes para el caso de $\delta = o$, ó sea para la viga de $n - 2$ tramos iguales empotrada en sus extremidades.

La disminucion del valor de M_k miéntras δ recorra toda la escala desde cero á ∞ será $\frac{C_{n-2k+1}}{12 A_{n-3}}$, que decrece á medida que k aumenta, convirtiéndose para el apoyo central en $\frac{1}{12 A_{n-3}}$.

§ 3.º—Momentos y esfuerzos trasversales en el tramo cargado.

27. *Parábola de los momentos de flexion. Puntos notables de la misma.*—La ecuacion general deducida en el número 7, para cuando los tramos de la viga son desiguales, se convierte para el caso actual en

$$M_k(x) = \frac{\alpha_{k-2}\,\beta_{n-k}}{4 D} p l^2 - \frac{\gamma_{k-1}\,\beta_{n-k}}{4 D} p l x - \frac{1}{2} p x \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

En el citado número añadimos que las ordenadas de los puntos P y Q (*Figura* 2.ª) podian determinarse por una sencilla construccion gráfica indicada en la misma figura. Aquellos puntos caian respectivamente en la primera y segunda mitad del tramo, pero en el caso presente tenemos

$$M P = \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l = \frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}} l = \frac{\alpha_{k-2}}{5\,\alpha_{k-2} - \alpha_{k-3}} l < \frac{1}{4} l$$

excepto para $k = 2$ y ciertos valores de δ;

$$M Q = \frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} l = \frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}} l = \left(1 - \frac{\alpha_{n-k-1}}{\gamma_{n-k}}\right) > \frac{3}{4} l \text{ y } < l$$

con la salvedad análoga.

La distancia MP es independiente de n, y sólo influyen en ella el número de órden k del tramo y δ, de manera que si los tramos extremos se conservan iguales, aunque varíe el número de los intermedios, la abscisa y la ordenada del punto p serán las mismas para tramos equidistantes de la extremidad más próxima y las del punto q igualmente para la más lejana; es decir, que conocidos aquellos puntos para una viga de cierto número de tramos, estarán tambien determinados para los que tengan un número par de tramos intermedios de ménos, cuya propiedad introduce una nueva simplificacion para el caso de las vigas simétricas que estamos estudiando.

Si en vez del sencillo procedimiento gráfico de la figura 2.ª se quieren determinar analíticamente las ordenadas de los puntos P y Q, lo harémos para la primera por la expresion deducida en el número 7 y por otra enteramente análoga para $Q q$, de manera que tendrémos

$$P p = -\frac{\alpha_{k-2}\,\beta_{k-1}}{4\,\gamma^2_{k-1}}\,p\,l^2 \qquad Q q = -\frac{\alpha_{n-k-1}\,\beta_{n-k}}{4\,\gamma^2_{n-k}}\,p\,l^2.$$

Tambien se podrán determinar estas ordenadas como formando parte de las parábolas auxiliares de la construccion gráfica, para lo que habia que calcular de una vez para siempre la ecuacion $y = \frac{1}{2}x^2$, á medida que varíe x (lo cual está ya hecho en las tablas de números elevados al cuadrado), y como las abscisas de los vértices de las citadas parábolas son respectivamente $x = \frac{1}{4}\,l$ y $x = \frac{3}{4}\,l$ y la ordenada comun $y = \frac{1}{32}\,pl^2$, sería preciso introducir este cambio para el cálculo de los momentos, en los mencionados puntos (a).

En los tramos extremos como $M_1 = M_{n+1} = o$ la distancia M P se reducirá tambien á cero, así como su ordenada, y para el punto Q tendrémos

$$M Q = \frac{\alpha_{n-1}}{\gamma_{n-1}}\,l \quad \text{y} \quad Q q = -\frac{\alpha_{n-2}\,\beta_{n-1}}{2\,\gamma^2_{n-1}}\,p\,l^2$$

28. *Alteraciones que sufren las abscisas de ambos puntos.* — Hemos visto que los puntos P y Q están comprendidos respectivamente en el primero y último cuarto del tramo, y vamos á determinar ahora las posiciones límites de los mismos á medida que δ varía. Tenemos, segun las relaciones (45)

$$\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} = \frac{E_{k-3} + 2\,A_{k-3}\,\delta}{3\,B_{k-2} + 2\,C_{k-2}\,\delta}$$

y aplicando la (53)

$$3\,A_{k-3}\,B_{k-2} - C_{k-2}\,E_{k-3} = -1, \text{ que da } A_{k-3} = \frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}} \cdot C_{k-2} - \frac{1}{3\,B_{k-2}}$$

Ademas

$$E_{k-3} = \frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}}\,3\,B_{k-2}$$

y sustituyendo

$$\frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} = \frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}} - \frac{2\,\delta}{3\,B_{k-2}\,(3\,B_{k-2} + 2\,C_{k-2}\,\delta)}$$

(a) Dijimos en el párrafo anterior que á medida que crece δ, disminuyen los aumentos de flexion en el apoyo del tramo cargado más distante del centro de la viga, y aumentan en el otro; de manera que dos parábolas correspondientes á valores de δ que difieran en una cantidad infinitamente pequeña, se cortarán necesariamente en la longitud del tramo cargado. Si quisiéramos determinar el lugar geométrico de estos puntos, hallariamos la ecuacion diferencial de $M_k\,(x)$ con relacion á δ, para lo cual convendria sustituir en la expresion general de esta cantidad el momento y esfuerzo trasversal del apoyo k por las fórmulas trasformadas, é igualando á cero la diferencial, obtendriamos una ecuacion de tercer grado entre las variables δ y x; de manera que si se conservaba el mismo eje de las x, y se tomaba el de las y para las δ, se podria trazar la curva de los lugares geométricos de dichas intersecciones.

$$= \frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}} - \frac{2}{3\,B_{k-2}\left(\frac{3\,B_{k-2}}{\delta} + 2\,C_{k-2}\right)}$$

que disminuye constantemente desde $\delta = o$ á $\delta = \infty$, y los límites correspondientes á aquellos dos valores son respectivamente $\frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}}$ y

$$\frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}} - \frac{1}{3\,B_{k-2}\,C_{k-2}} = \frac{E_{k-3}}{3\,B_{k-2}} - \frac{1}{3\,A_{2\,(k-2)}}$$

en que el segundo término que representa la disminucion total de la abscisa M P entre su límite superior é inferior es muy pequeño, pues su relacion al anterior es $\frac{1}{E_{k-3}\,C_{k-2}} = \frac{2}{C_{2\,(k-2)}+1}$.

Del mismo modo deducirémos

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\gamma_{n-k}} = \frac{E_{n-k-1} + 2\,A_{n-k-1}\,\delta}{3\,B_{n-k-1} + 2\,C_{n-k-1}\,\delta} = \frac{E_{n-k-1}}{3\,B_{n-k-1}} + \frac{2\,\delta}{3\,B_{n-k-1}\,(3\,B_{n-k-1} + 2\,C_{n-k-1}\,\delta)}$$

que nos indica que la abscisa M Q aumenta desde $\frac{E_{n-k-1}}{3\,B_{n-k-1}}$, correspondiente á $\delta = o$, hasta $\frac{E_{n-k-1}}{3\,B_{n-k-1}} + \frac{1}{3\,A_{2\,(n-k-1)}}$ para $\delta = \infty$, siendo tambien muy pequeño el segundo término que representa la variacion de la abscisa.

Vemos pues, que los puntos P y Q recorren dos espacios muy reducidos de la longitud del tramo y acercándose ambos á las extremidades M y N del mismo desde sus posiciones iniciales correspondientes á $\delta = o$ hasta $\delta = \infty$.

29. *Otra propiedad de las parábolas de la carga aislada.*—Si en la ecuacion que nos determina el momento de flexion en un punto cualquiera del tramo cargado, en vez de sustituir por M_k y T_k sus valores primitivos, introducimos las fórmulas trasformadas, tendrémos

$$M_k\,(x) = \frac{(C_{n-3} - C_{n-2\,k+1})\,(4\,\delta^2 - 3)}{24\,D}\,p\,l^2 + \frac{\beta_{n-2}}{4\,D}\,p\,l^2 + \frac{A_{n-2\,k}\,(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D}\,p\,l\,(x)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,p\,x\,(l - x) = \frac{C_{n-3}\,(4\,\delta^2 - 3) + 6\,\beta_{n-2}}{24\,D}\,p\,l^2$$

$$- \frac{(C_{n-2\,k+1}\,l - A_{n-2\,k}\,x)\,(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D}\,p\,l\,x - \tfrac{1}{2}\,p\,x\,(l - x).$$

Si hacemos en esta ecuacion $x = \frac{C_{n-2k+1}}{6\,A_{n-2k}}\,l$, que es tambien menor que l, el segundo término se reducirá á cero, y quedarán el primero, que depende de n y δ, y el tercero, que representa la parábola $y = \frac{1}{2}\,p\,x^2$, trazada de manera que pase por los dos apoyos del tramo k. Siendo el primer término independiente de k, se conservará constante en los diversos tramos de la viga, de manera que si se toma la ordenada que represente y se traza una línea paralela al eje de las x, se fijan luégo las abscisas $\frac{C_{n-2k+1}}{6 A_{n-2k}} l$, y se hallan sus respectivas ordenadas trazando con la plantilla la curva que pase por los puntos **M** y **N**, las partes de las verticales interceptadas entre la horizontal y las parábolas serán los valores de los momentos en dichos puntos.

Si suponemos ahora que varía el número de tramos intermedios de la viga y que se consideren dos tramos equidistantes de los centros de las mismas, las ordenadas de las parábolas auxiliares serán iguales que ántes, y sólo variará la ordenada de la línea horizontal, que, como hemos dicho anteriormente, depende tambien de n.

La abscisa $x = \frac{C_{n-2k+1}}{6 A_{n-2k}} l$ es algo superior á MQ, aunque difiere poco, pues la diferencia entre aquélla y el mayor valor $\frac{A_{n-k-1}}{C_{n-k-1}} l$ de MQ es

$$\frac{C_{n-2k+1}}{6 A_{n-2k}} l - \frac{A_{n-k-1}}{C_{n-k-1}} l = \frac{C_{k-2}}{6 A_{n-2k} C_{n-k-1}} l$$

que es en general una cantidad pequeña excepto para el tramo central, ó sea para $k = m + 1$, que la convierte en ∞.

Más adelante demostrarémos que hay todavía otro punto de la parábola de la carga aislada, cuya ordenada puede determinarse áun más fácilmente que las de los tres que hemos examinado en este número, de manera que conocido éste y el punto p, se trazará en cada tramo la parábola de los momentos debidos á la carga aislada con el auxilio de la plantilla.

La recta de los esfuerzos trasversales está determinada por la ecuacion (17) $T_k (x) = T_k - p x$, y T_k será igual, segun sabemos, á la distancia del apoyo de órden k del tramo, al eje de la parábola de los momentos (prescindiendo tambien del factor comun $p l$) que se hallará tomando el punto medio de la distancia comprendida entre las intersecciones de dicha curva con el eje de las x.

(*Se continuará.*)

PABLO DE ALZOLA.

OBRAS PÚBLICAS DE ESPAÑA.

I.

Hace un año publicamos en el núm. 11 del último tomo de la REVISTA un articulo en el cual exponiamos el lamentable estado de nuestra red de caminos provinciales y vecinales, deducido de los datos exactos que teniamos á la vista, relativos á 27 provincias, únicas que en aquella época habian facilitado las noticias que se les habian pedido. Posteriormente otras cinco han comunicado estas noticias, con lo cual las 45 provincias de la Península, descontadas las cuatro Vascongadas, cuya administracion especial las separa del cuadro de nuestras observaciones, conocemos ya el estado de este servicio en las tres cuartas partes de nuestro territorio; y podemos deducir los caminos provinciales y vecinales que existen en España, sin el temor de incurrir en error por defecto en los resultados que presentemos, puesto que bien puede suponerse que no debe ser muy lisonjero el desarrollo de estas vias de comunicacion en las 11 provincias, ó al ménos en la mayor parte de éstas, que no han presentado los datos que á este desarrollo se refieren.

Este asunto es de trascendental importancia; por esto, ademas de lo que ya dijimos en nuestro artículo ántes citado, y de la imperfeccion con que hemos de tratar esta cuestion, porque á más no alcanzan nuestras fuerzas, vamos á insistir, ampliándolas, en el órden de consideraciones que entónces expusimos.

De las 32 provincias á las cuales se refieren nuestras observaciones, hay 12 que no tienen un solo kilómetro de camino provincial: con arreglo