AÑO XVIII DE LA PUBLICACION. REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS. AÑO VIII DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID, 1.° DE JULIO DE 1870.

TOMO XVIII. NÚM. 13.

TEORÍA DEL CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Continuacion.*)

Ahora bien; consideremos en general una serie

$$S_0\ S_1\ S_2\ S_3 \cdots\cdots\ S_p \cdots\cdots\ S_q \cdots\cdots$$

tal, que sus dos primeros términos sean arbitrarios, y los demas se formen de la misma manera que anteriormente, tendrémos en virtud de la propiedad demostrada en el número precedente

$$S_q\ S_p - S_{q-1}\ S_{p-1} = S_{q+1}\ S_{p-1} - S_q\ S_{p-2}$$

De aquí se deduce, aplicando sucesivamente esta propiedad, la siguiente:

$$S_q\ S_p - S_{q-1}\ S_{p-1} = S_{q+p}\ S_0 - S_{q+p-1}\ S_{p-1} \qquad (23)$$

y ademas

$$S_q\ S_p - S_{q-1}\ S_{p-1} = S^2_{\frac{q+p}{2}} - S^2_{\frac{q+p}{2}-1}$$

siempre que $p+q$ sea número par. Esta cantidad tiene la forma del denominador D_k de las fórmulas generales, y siendo n el número de tramos $p+q=n-1$, de manera que si n es impar é igual á $2m+1$, tendrémos $p+q=2m$.

$$\left.\begin{array}{l} S_q\ S_p - S_{q-1}\ S_{p-1} = S^2_m - S^2_{m-1} \\ \text{y si } n \text{ es par é igual á } 2m \\ S_q\ S_p - S_{q-1}\ S_{p-1} = S_m\ S_{m-1} - S_{m-1}\ S_{m-2} = S_{m-1}\,(S_m - S_{m-2}) \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Si hacemos $p=q$ en la fórmula (23), tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} S^2_p - S^2_{p-1} = S_{p+1}\ S_{p-1} - S_p\ S_{p-2} \\ \text{ó sea} \\ S^2_p - S_{p+1}\ S_{p-1} = S^2_{p-1} - S_p\ S_{p-2} \\ \text{y por consiguiente} \\ S^2_p - S_{p+1}\ S_{p-1} = S^2_1 - S_2\ S_0 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Tambien se deduce de la relacion que precede á la (25)

$$S_q\, S_p - S_{q+1}\, S_{p-1} = S_{q-1}\, S_{p-1} - S_q\, S_{p-2} = S_{q-p}\, S_0 - S_{q-p+1}\, S_{-1} \qquad (26)$$

suponiendo que se continúe la serie S hácia la izquierda para formar por la misma ley el término S_{-1}.

Estas fórmulas, aplicadas á la serie α, nos conducen á las siguientes:

$$D = \alpha_q\, \alpha_p - \alpha_{q-1}\, \alpha_{p-1} = \alpha_{q+p} - 2\, \alpha_{q+p-1}\,(1-\delta) = \alpha_{n-1} - 2\, \alpha_{n-2}\,(1-\delta) \qquad (27)$$

y ademas, segun que n sea par ó impar

$$\left.\begin{aligned} D &= \alpha_{m-1}\,(\alpha_m - \alpha_{m-2}) = 2\, \alpha_{m-1}\, \Sigma_{m-1} \\ D &= \alpha_m^2 = \alpha_{m-1}^2 = (\alpha_m + \alpha_{m-1})\,(\alpha_m - \alpha_{m-1}) = \gamma_m\, \beta_m \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

La tercera del grupo (25) se convierte en

$$\alpha_p^2 - \alpha_{p+1}\, \alpha_{p-1} = 4\, \delta^2 - 3$$

y la (26) en

$$\alpha_q\, \alpha_p - \alpha_{q+1}\, \alpha_{p-1} = \alpha_{q-p} - 2\, \alpha_{q-p+1}\,(1-\delta) \qquad (29)$$

Si á las tres series α β y γ que hemos considerado hasta ahora, agregamos otra Σ que siga la misma ley de formacion que aquéllas y que se deduzca de la α por la relacion $\Sigma_p = 2\, \alpha_p - \alpha_{p-1}$, tendrémos tambien

$$\left.\begin{aligned} D = \alpha_q\, \alpha_p - \alpha_{q-1}\, \alpha_{p-1} &= \Sigma_q\, \alpha_{p-1} + \Sigma_{p-1}\, \alpha_q \\ \alpha_q\, \alpha_p - \alpha_{q+1}\, \alpha_{p-1} &= \Sigma_p\, \alpha_{q+1} - \Sigma_{q+1}\, \alpha_p \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Los diferentes términos de las series entran en las fórmulas generales deducidas en el párrafo primero con signos alternados, y vamos á determinar la suma algebraica de los mismos, para lo cual tenemos

$$S_0,\ S_1,\ S_2 = 4\, S_1 - S_0;\ S_3 = 4\, S_2 - S_1\ \cdots\cdots\ S_n = 4\, S_{n-1} - S_{n-2}$$

Supongamos, en primer lugar, que n sea par, y vamos á determinar el valor de

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 \cdots\cdots + S_n = 4\, S_1 - 5\,(S_2 - S_3 + \cdots\cdots + S_{n-2}) + 4\, S_{n-1}$$

que simplificando se reduce á

$$S_1 - S_2 + S_3 - \cdots\cdots + S_{n-1} = \frac{S_0 + S_1 + S_{n-1} + S_n}{6}$$

y por consiguiente

$$S_0 - S_1 + S_2 \cdots\cdots + S_n = \frac{S_{-1} + S_0 + S_n + S_{n+1}}{6} \qquad (31)$$

Y si n es número impar, en cuyo caso S_n será negativo

$$S_1 - S_2 + S_3 \cdots\cdots - S_n = \frac{S_0 + S_1 - S_n - S_{n+1}}{6} \qquad (32)$$

De una manera análoga se deduce

$$\left.\begin{aligned} S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n &= \frac{S_0-S_1-S_n+S_{n+1}}{2} \\ S_2+S_4+S_6+\cdots\cdots+S_n &= \frac{S_0-2\,S_1-2\,S_n+S_{n+1}}{6} \\ S_1+S_3+S_5+\cdots\cdots+S_n &= \frac{2\,S_0-S_1-S_n+2\,S_{n+1}}{6} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

en cuyas fórmulas sólo entran cuatro términos en el segundo miembro, cualquiera que sea el valor de n. Aplicando las (31), (32) y (33), por ejemplo, á la serie β, tendrémos

$$\left.\begin{aligned} \beta_1-\beta_2+\beta_3-\cdots\cdots\pm\beta_n &= \frac{2\,\delta\pm\Sigma_n}{3} \\ \beta_2+\beta_4+\beta_6+\cdots\cdots+\beta_n &= \frac{\gamma_n-\gamma_1}{6} \\ \beta_1+\beta_3+\beta_5+\cdots\cdots+\beta_n &= \frac{\gamma_{n+1}-\gamma_0}{6} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

14. *Relaciones entre los números de estas series y los correspondientes al caso de los tramos iguales.*— Las cuatro series α, β, γ y Σ se trasforman en el caso de los tramos iguales, ó sea cuando $\delta=1$, en otras tantas que las llamarémos A, B, C y E, y que son las siguientes:

Serie A: ··· $A_{-1}=0$ $A_0=1$ $A_1=4$ $A_2=15.$ $A_3=56.$ $A_4=209$ $A_5=780.$ $A_6=2911,$ $A_7=10864$
Serie B: ··· $B_{-1}=1$ $B_0=1$ $B_1=3$ $B_2=11$ $B_3=41$ $B_4=153$ $B_5=571$ $B_6=2131,$ $B_7=7953$
Serie C: ··· $C_{-1}=1$ $C_0=1$ $C_1=5$ $C_2=19$ $C_3=71$ $C_4=265$ $C_5=989$ $C_6=3691$ $C_7=13775$
Serie E: ··· $E_{-1}=1$ $E_0=2$ $E_1=7$ $E_2=26$ $E_3=97$ $E_4=362$ $E_5=1351$ $E_6=5042$ $E_7=18817$
Serie A $A_8=40545$ $A_9=151316$ $A_{10}=564719.$ $A_{11}=2107560$ $A_{12}=7865521,$ . . . .
Serie B $B_8=29681$ $B_9=110771$ $B_{10}=413403$ $B_{11}=1542841$ $B_{12}=5757964,$ . . . .
Serie C $C_8=51409$ $C_9=191861$ $C_{10}=716035$ $C_{11}=2672279$ $C_{12}=9973081,$ . . . .
Serie E $E_8=70226$ $E_9=262087$ $E_{10}=978122$ $E_{11}=3650401$ $E_{12}=13623482,$ . . . . . .

y pudieran continuarse indefinidamente en uno y otro sentido.

Ahora bien, si se examina la ley de formacion de una serie cualquiera S, correspondiente al caso de que nos hemos ocupado en el número anterior, se observa que un término cualquiera puede expresarse en funcion de otros dos consecutivos de la misma serie afectados de factores de la serie A, y se llega muy fácilmente á las relaciones

$$\left.\begin{aligned} S_q &= A_{q-p}\,S_p-A_{q-p-1}\,S_{p-1} \\ S_q &= A_p\,S_{q-p}-A_{p-1}\,S_{q-p-1} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Aplicando convenientemente estas fórmulas y por medio de algunas sencillas trasformaciones, se llega á obtener la diferencia ó la suma de dos términos cualesquiera de la serie S_p y S_q; si $q-p=2m+1$ es un número impar, tendrémos

$$\left.\begin{aligned} S_q-S_p &= C_m\,(S_{p+m+1}-S_{p+m}) \\ S_q+S_p &= B_m\,(S_{p+m+1}+S_{p+m}) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

que aplicadas á las cuatro series α, β, γ y Σ, nos conducen á

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_q-\alpha_p=C_m\,\beta_{p+m+1} \\ \beta_q-\beta_p=2\,C_m\,\alpha_{p+m} \\ \gamma_q-\gamma_p=2\,C_m\,\Sigma_{p+m} \\ \Sigma_q-\Sigma_p=C_m\,\gamma_{p+m+1} \end{array}\right\} \quad (37) \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha_q+\alpha_p=B_m\,\gamma_{p+m+1} \\ \beta_q+\beta_p=2\,B_m\,\Sigma_{p+m} \\ \gamma_q+\gamma_p=6\,B_m\,\alpha_{p+m} \\ \Sigma_q+\Sigma_p=3\,B_m\,\beta_{p+m+1} \end{array}\right\} \quad (38)$$

y si $p-q$ es par y lo suponemos igual á $2\,m$

$$\left.\begin{array}{l} S_q-S_p=2\,A_{m-1}\,(2\,S_{p+m}-S_{p+m-1}) \\ S_q+S_p=2\,E_{m-1}\,S_{p+m} \end{array}\right\} \quad (39)$$

que aplicadas igualmente á las mencionadas series dan

$$\left.\begin{array}{l} \beta_q-\beta_p=2\,A_{m-1}\,\gamma_{p+m} \\ \alpha_q-\alpha_p=2\,A_{m-1}\,\Sigma_{p+m} \\ \gamma_q-\gamma_p=6\,A_{m-1}\,\beta_{p+m} \\ \Sigma_q-\Sigma_p=6\,A_{m-1}\,\alpha_{p+m} \end{array}\right\} \quad (40) \qquad \left.\begin{array}{l} \beta_q+\beta_p=2\,E_{m-1}\,\beta_{p+m} \\ \alpha_q+\alpha_p=2\,E_{m-1}\,\alpha_{p+m} \\ \gamma_q+\gamma_p=2\,E_{m-1}\,\gamma_{p+m} \\ \Sigma_q+\Sigma_p=2\,E_{m-1}\,\Sigma_{p+m} \end{array}\right\} \quad (41)$$

Combinando por adicion y sustraccion estas relaciones, se obtienen otras muchas entre las mismas cantidades. Así, por ejemplo, de los dos grupos (37) y (38) se deduce

$$\beta_q=C_m\,\alpha_{p+m}+B_m\,\Sigma_{p+m}\,;\ \beta_p=B_m\,\Sigma_{p+m}-C_m\,\alpha_{p+m} \qquad (42)$$

Si suponemos que $p+m=o$, q se convertirá en $m+1$, y tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{m+1}=C_m+B_m\times 2\,\delta=C_m+2\,B_m\,\delta \\ \beta_{-m}=2\,B_m\,\delta-C_m \end{array}\right\} \quad (43)$$

y

expresiones por medio de las cuales podemos deducir la serie β de las correspondientes al caso de los tramos iguales que hemos dado á conocer al principio de este número. Sumando y restando las dos expresiones anteriores se deducen

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{m+1}+\beta_{-m}=4\,B_m\,\delta \\ \beta_{m+1}-\beta_{-m}=2\,C_m \end{array}\right\} \quad (44)$$

Del mismo modo se obtienen las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_p=E_{p-1}+2\,A_{p-1}\,\delta \\ \gamma_p=3\,B_{p-1}+2\,C_{p-1}\,\delta \\ \Sigma_p=3\,A_{p-1}+2\,E_{p-1}\,\delta \end{array}\right\} \quad (45)$$

Sustituyendo el primero de estos valores en el segundo miembro de la (29) obtendrémos

$$\alpha_q\,\alpha_p-\alpha_{q+1}\,\alpha_{p-1}=A_{q-p}\,(4\,\delta^2-3) \qquad (46)$$

Pudiéramos detenernos mucho en este estudio para determinar otras muchas propiedades de los números de las series, pero las relaciones anteriores son más que suficientes para el desarrollo de esta Memoria, y este estudio nos apartaria demasiado de nuestro objeto.

15. *Caso en que todos los tramos son iguales.* — En el número precedente hemos dado á conocer las cuatro series de números correspondientes á este caso, y vamos á establecer las relaciones que ligan á los mismos.

El denominador comun de las fórmulas (27) se convierte en este caso en $D = A_{n-1}$.

y ademas en

$$\left.\begin{array}{l} D = 2\,A_{m-1}\,E_{m-1} \\ D = B_m\,C_m \end{array}\right\} \quad (47)$$

segun que n sea par ó impar.

Las fórmulas (27) y (29) nos conducen

$$\left.\begin{array}{l} A_{q-p} = A_q\,A_p - A_{q+1}\,A_{p-1} \\ A_{q+p} = A_q\,A_p - A_{q-1}\,A_{p-1} \end{array}\right\} \quad (48)$$

que se trasforman

$$\left.\begin{array}{l} A_{q-p} - A_{q-p} = 2\,A_{p-1}\,E_q \\ A_{q+p} + A_{q-p} = 2\,A_q\,E_{p-1} \end{array}\right\} \quad (49)$$

y haciendo $p = q$

$$A_{2p} = 2\,A_{p-1}\,E_p \ \text{ y } \ A_p^2 - A_{p+1}\,A_{p-1} = 1 \qquad (50)$$

y de esta última se deduce

$$A_p^2 - A_{p-1}^2 = A_{2p} \qquad (51)$$

Procediendo de una manera análoga con las otras series se obtienen las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} B_p^2 - B_{p+1}\,B_{p-1} = -2 \\ C_p^2 - C_{p+1}\,C_{p-1} = +6 \\ E_p^2 - E_{p+1}\,E_{p-1} = -3 \end{array}\right\} \quad (52)$$

Tambien se demuestran muy fácilmente estas otras:

$$\left.\begin{array}{l} C_p^2 - 6\,A_p\,A_{p-1} = 3\,A_p\,B_p - C_p\,E_p = C_p\,E_{p-1} - 3\,A_{p-1}\,B_p = 1 \\ A_{n-1} = \dfrac{C_q\,C_p - C_{q-1}\,C_{p+1}}{6} = \dfrac{C_q\,B_p + C_{p-1}\,B_{q-1}}{4} \end{array}\right\} \quad (53)$$

Estas relaciones son muy numerosas, pero tampoco insistirémos más sobre este punto por la misma razon que hemos dado al final del número anterior.

Determinadas ya las fórmulas generales para el cálculo de las vigas rectas, y terminado el estudio preliminar desarrollado en este párrafo, vamos á pasar á la aplicacion al caso en que todos los tramos sean iguales, excepto el primero y último, siendo ademas éstos de la misma longitud, que es lo que sucede generalmente en la práctica en la mayoría de las vigas rectas empleadas en los puentes.

CAPÍTULO II.

EFECTOS DE LA CARGA AISLADA DE UN SOLO TRAMO, EN UNA VIGA SIMÉTRICA DE NÚMERO IMPAR DE TRAMOS INTERMEDIOS IGUALES.

§ 1.º—Momentos de flexion y esfuerzos trasversales en los puntos de apoyo.

16. *Momentos en los apoyos de un tramo cargado ó descargado.* — Supongamos que un tramo cualquiera de órden k esté sometido á un peso p repartido uniformemente en toda su longitud, y los momentos en los dos puntos de apoyo que comprenden el tramo, que los designarémos respectivamente por M_k y $M_k(l)$ ó N_{k+1} para indicar que corresponde al apoyo $k+1$ serán, segun se deduce de la fórmula general del núm. 7, haciendo $x=o$ y $x=l$.

$$M_k = -\frac{\alpha_{k-2}\,\beta_{n-k}}{4\left(\alpha_{n-k}\,\alpha_{k-1}-\alpha_{n-k-1}\,\alpha_{k-2}\right)}\times p\,l^2$$

$$N_{k+1} = \frac{-\alpha_{k-1}\,\beta_{n-k}}{4\left(\alpha_{n-k}\,\alpha_k-\alpha_{n-k-1}\,\alpha_{k-2}\right)}\times p\,l^2+\frac{1}{4}p\,l^2 = \frac{\alpha_{n-k-1}\,\beta_{k-1}}{4\left(\alpha_{n-k}\,\alpha_k-\alpha_{n-k-1}\,\alpha_{k-2}\right)}\,p\,l^2$$

Y para el primer término

$$M_1 = o \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{\alpha_{n-2}\,\beta_0}{4\left(\alpha_{n-2}\,\alpha_1-\alpha_{n-3}\,\alpha_0\right)}\,p\,\delta^3\,l^2$$

cuyos denominadores sabemos que son iguales, y los designamos en el capítulo anterior por $4\,D$.

Supongamos que continúa cargado el tramo k y que se quiere hallar el momento en un apoyo tal como r, siendo este número menor que k, tendrémos

$$N_r = \pm\frac{\alpha_{r-2}\,\beta_{n-k}}{4\,D}\,p\,l^2$$

que será positivo ó negativo segun que $k-r$ sea par ó impar.

Si $r>k$

$$N_r = \mp\frac{\alpha_{n-r}\,\beta_{k-1}}{4\,D}\,p\,l^2$$

que será, por el contrario, negativo ó positivo segun $r-k$ sea par ó impar.

17. *Trasformacion de las expresiones de los momentos en los apoyos del tramo cargado.*—Las fórmulas del número anterior nos dan estos momentos en funcion de los números de las series α y β; pero como éstos á su vez dependen, no sólo del número de órden á que corresponden, sino de δ, siendo las expresiones obtenidas funciones implícitas de esta variable, no se presta aquella forma al estudio de las propiedades de los momentos debidos á la carga aislada de un solo tramo; y para abordar esta discusion hemos procurado trasformar aquellas fórmulas en otras en que aparezca δ bajo otra forma más explícita, habiendo llegado á los resultados consignados á continuacion.

Supongamos que el tramo de órden k esté cargado, y tendrémos

$$M_k = \frac{\alpha_{k-2}\,\beta_{n-k}}{4\,D}\,p\,l^2 \quad \text{y} \quad N_{k+1} = \frac{\alpha_{n-k-1}\,\beta_{k-1}}{4\,D}\,p\,l^2$$

y si se carga el $k-1$

$$M_{k-1} = \frac{\alpha_{k-3}\beta_{n-k+1}}{4\,D} p\,l^2 \text{ y } N_k = \frac{\alpha_{n-k}\beta_{k-2}}{4\,D} p\,l^2$$

De manera que

$$N_k - M_k = \frac{\alpha_{n-k}\beta_{k-2} - \alpha_{k-2}\beta_{n-k}}{4\,D} p\,l^2 = \frac{\alpha_{n-k-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-k}\alpha_{k-3}}{4\,D} p\,l^2$$

segun se deduce sustituyendo por β_{k-2} y β_{n-k} sus valores (7).

Ahora bien, segun la relacion (46)

$$\alpha_{n-k-1}\alpha_{k-2} - \alpha_{n-k}\alpha_{k-3} = A_{n-2k+1}(4\,\delta^2 - 3)$$

luego

$$N_k - M_k = \frac{A_{n-2k+1}(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D} p\,l^2.$$

Por lo tanto, el numerador de la diferencia de los momentos debidos á la carga aislada en un mismo apoyo, segun esté cargado el tramo anterior ó el posterior, es siempre igual al factor constante $4\,\delta^2 - 3$, multiplicado por un número de la serie relativa á los tramos iguales, y por consiguiente independiente de δ.

Del mismo modo tenemos

$$M_k - M_{k-1} = \frac{\alpha_{k-2}\beta_{n-k} - \alpha_{n-3}\beta_{n-k+1}}{4\,D} p\,l^2,$$

pero

$$\alpha_{k-2}\beta_{n-k} - \alpha_{k-3}\beta_{n-k+1} = \alpha_{k-2}\alpha_{n-k} - \alpha_{k-2}\alpha_{n-k-1} - \alpha_{k-3}\alpha_{n-k+1} + \alpha_{k-3}\alpha_{n-k}$$

$$\alpha_{k-3}\alpha_{n-k} - \alpha_{k-2}\alpha_{n-k-1} = -A_{n-2k+1}(4\,\delta^2 - 3)$$

segun acabamos de demostrar, é igualmente

$$\alpha_{k-2}\alpha_{n-k} - \alpha_{k-3}\alpha_{n-k+1} = A_{n-2k+2}(4\,\delta^2 - 3)$$

y sustituyendo

$$M_k - M_{k-1} = \frac{A_{n-2k+2}(4\,\delta^2 - 3) - A_{n-2k+1}(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D} p\,l^2 =$$

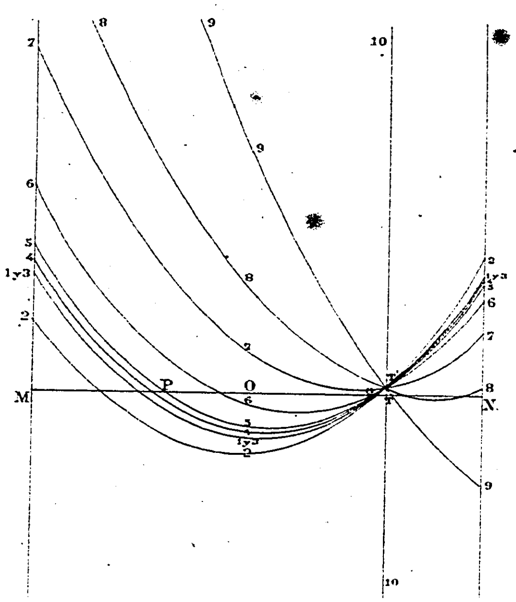
$$= \frac{(A_{n-2k+2} - A_{n-2k+1})(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D} p\,l^2 = \frac{B_{n-2k+2}(4\,\delta^2 - 3)}{4\,D} p\,l^2$$

de manera que la diferencia de los momentos en los dos puntos de apoyo de órden k y $k-1$, segun que esté cargado respectivamente cada uno de estos tramos, nos conduce tambien para el numerador al producto del mismo factor $4\,\delta^2 - 3$ por un número de la serie B de tramos iguales.

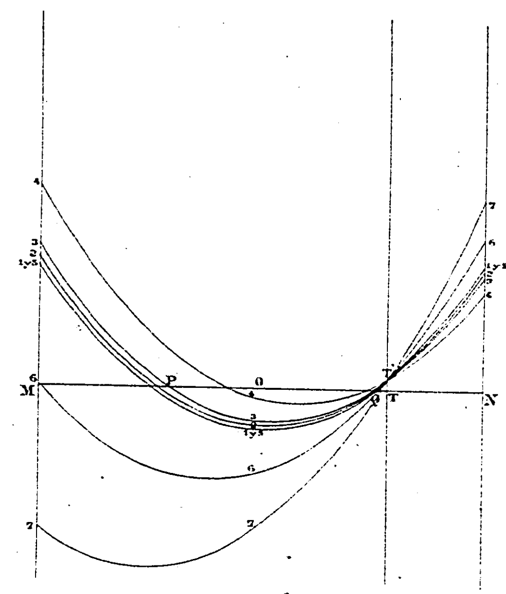
(*Se continuará.*)

P. DE ALZOLA.

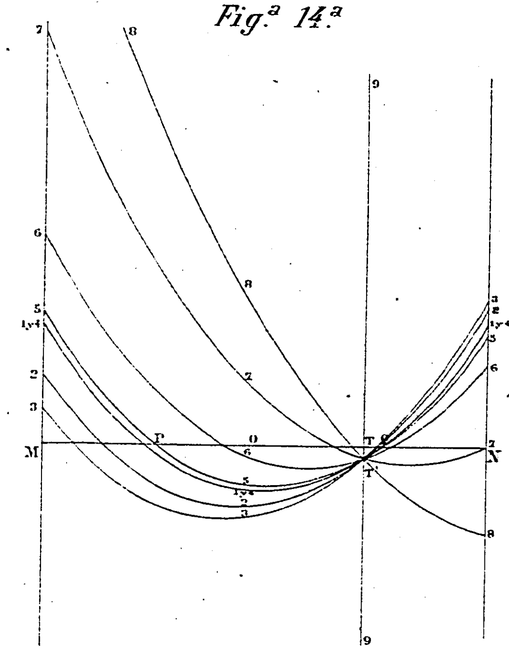
Figª 8ª



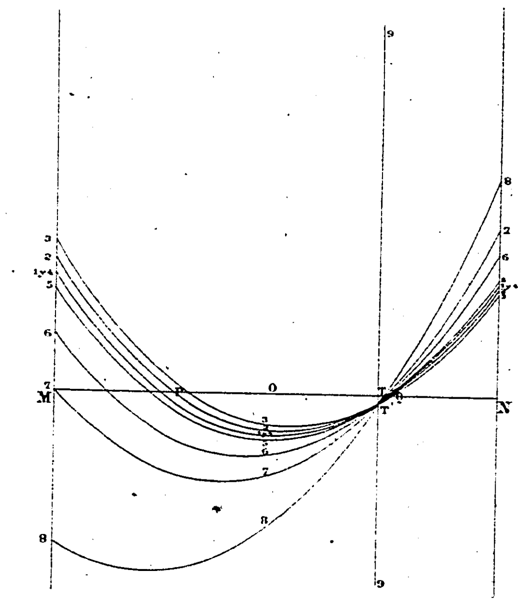
Figª 9ª



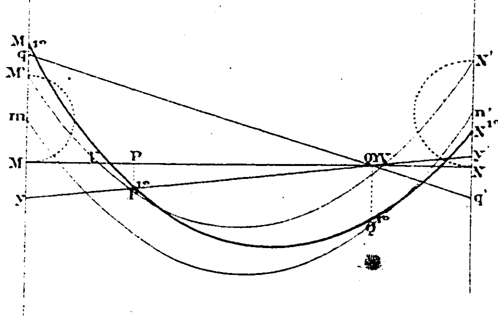
Figª 14ª



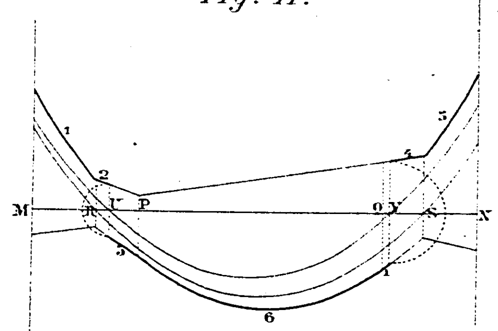
Figª 15ª



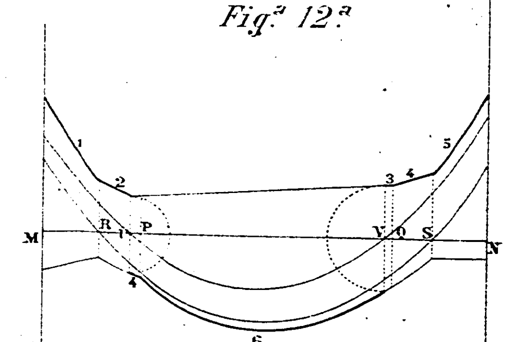
Figª 10ª



Figª 11ª



Figª 12ª



Figª 13ª