AÑO XVIII DE LA PUBLICACION. **REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.** AÑO VIII DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID, 15 DE JUNIO DE 1870.

TOMO XVIII. NÚM. 12.

TEORÍA
DEL
CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(*Continuacion.*)

8. *Envolventes de los momentos de flexion debida á la sobrecarga.*—Para el estudio del cálculo de las vigas rectas, cuya principal aplicacion es para la determinacion de las dimensiones de los puentes, es menester considerarlas sometidas á sobrecargas que actúen en las diversas combinaciones que produzcan en cada punto el máximo momento de flexion, y ademas á la carga permanente de la viga, pudiendo estudiarse por separado ambos casos, en virtud del principio de la superposicion de los efectos de las fuerzas.

Tanto en el primero como en el segundo, los diversos tramos están sometidos á pesos uniformemente repartidos en la longitud de los mismos é iguales por metro lineal; pero para mayor generalidad de la discusion, supondrémos que aquéllos varien de tramo á tramo. Limitándonos ahora á los efectos de la sobrecarga de la viga, considerarémos todas las hipótesis posibles de coordinaciones de los pesos que actúen en los diversos tramos, pero suponiendo siempre que estas sobrecargas obren en la totalidad de cada uno de aquéllos por las razones que expone Mr. Bresse en el número 25 de la 3.ª parte de su *Tratado*.

Sustituyendo en la ecuacion (15) los valores de M_k y T_k dados por las fórmulas (8) y (10), tendrémos para valor del momento en un punto cualquiera del tramo k

$$M_k(x) = \frac{(\alpha'_{n-k} l_k - \gamma'_{n-k} x)(\pm p_1 l_1^3 \mp \cdots\cdots + \beta_{k-2} p_{k-1} l_{k-1}^3)}{4 l_k^2 D_k} -$$

$$- \frac{(\alpha_{k-2} l_k - \gamma_{k-1} x)(+\beta'_{n-k-1} p_{k+1} l_{k+1}^3 - \cdots\cdots \pm p_n l_n^3)}{4 l_k^2 D_k} +$$

$$+ \frac{(\alpha_{k-2} l_k - \gamma_{k-1} x)\beta'_{n-k} p_k l_k^3}{4 l_k^2 D_k} + \frac{1}{2} p_k x\left(x - \frac{l_k}{2}\right) \qquad (18)$$

Esta expresion nos indica que los momentos de flexion que producen en el tramo k las sobrecargas de los tramos comprendidos desde aquél hasta el primero están dadas por líneas rectas que pasan todas por un punto Q (*Figura* 3.ª), que es el mismo de que hablamos en el número anterior y cuya abscisa es

$$x = \frac{\alpha'_{n-k}}{\gamma'_{n-k}} l_k = \frac{\alpha'_{n-k}}{\alpha'_{n-k-1} + \alpha'_{n-k}} l_k > \frac{1}{2} l_k \text{ y } < l_k$$

Igualmente, los pesos de los tramos comprendidos entre el k y el último, ó sea de órden n, están tambien dados por líneas rectas que se cortan en el punto P, cuya distancia á la extremidad M del tramo es

$$x = \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l_k < \frac{1}{2} l_k.$$

Por último, la carga aislada del tramo k determina para los momentos, segun hemos visto, una parábola igual á la dada por $y = \frac{1}{2} p_k x^2$, pero que no está referida á su eje, y de que nos hemos ocupado en el número 6, habiendo demostrado que sus ordenadas son siempre positivas en M y N, y negativas en P y Q.

Tratemos ahora de determinar el máximo momento, tanto positivo como negativo, en cada punto del tramo k. Para esto observarémos que no hay inconveniente alguno en sumar en la expresion general de $M_k(x)$ los términos que tengan el mismo signo, de manera que si llamamos F á la suma de los términos positivos comprendidos en el segundo paréntesis del primer término, G á la de los negativos, y H é I las correspondientes del segundo término, tendrémos que la suma de todos será

$$\frac{(\alpha'_{n-k} l_k - \gamma'_{n-k} x)(F-G) + (\alpha_{k-2} l_k - \gamma_{k-1} x)(H-I)}{4 l_k^2 D}$$

que representa las cuatro líneas rectas F Q, G Q, H P é I P trazadas en la citada figura 3.ª La suma de las ordenadas positivas corresponde á la carga de los tramos..... $k-5$, $k-3$, $k-1$, $k+2$, $k+4$, $k+6$..... en la parte M P del tramo; pero si observamos que la parábola R′ R S S′ de los momentos debidos al tramo k es positiva entre M y R, habrá que añadir ésta en el grupo anterior para dicho trozo, pero quedando excluido el tramo k en la parte R P.

Igualmente se deduce que los tramos cargados que dan momentos positivos para el trozo P Q son el

. . . .	$k-5$, $k-3$, $k-1$, $k+1$, $k+3$, $k+5$.....
Para Q S.	$k-4$, $k-2$, $k+1$, $k+3$, $k+5$.............
y para S N.	$k-4$, $k-2$, k, $k+1$, $k+3$, $k+5$.........

La suma de las ordenadas positivas nos determina un contorno mixtilíneo marcado con línea gruesa en la parte superior del eje M N, compuesto de cinco trozos; y de una manera análoga se deduce la envolvente de los momentos negativos señalada en la parte inferior de M N.

El contorno positivo corresponde, como acabamos de ver, á cinco casos distintos de reparticion de la sobrecarga, que los hemos representado en la figura 4.ª Los cinco negativos son complementarios de los positivos correspondientes á cada trozo, entendiéndose por esto dos casos de distribucion de la sobrecarga, que, reunidos, hacen que todos los tramos queden cargados; pero como se observa en dicha figura, el caso 4.° es complementario del 1.°, y el 5.° del 2.°, de modo qne sólo habrá que agregar el 6.°, de la misma figura, para completar los relativos á los máximos momentos negativos; y por consiguiente no hay que tener en cuenta más que tres casos distintos, ó por mejor decir, cuatro, contando con aquel en que todos los tramos estén cargados. Ahora nos resta explicar cómo se podrá reconocer en qué parte del tramo debe adoptarse el contorno correspondiente á los momentos positivos, y en dónde el de los negativos, que está reducido á saber cuáles son mayores en valor absoluto. Para esto nos basta observar que las ordenadas positivas y las negativas son complementarias; de manera que si hallamos la diferencia de ambas en dos puntos, y tomamos las ordenadas correspondientes, podrémos trazar por los dos puntos así obtenidos la parábola $y = \frac{1}{2} p_k x^2$ (*Figura* 5.ª), cuyas intersecciones U y V con el eje de las x separarán los momentos positivos y negativos, é introducirán en el tramo otras dos divisiones, de manera que resultarán en realidad siete trozos, de los que serán positivos ó negativos los correspondientes á ordenadas del mismo signo de la parábola U V.

Podriamos resolver tambien el problema de la determinacion de los momentos de flexion en estos diversos casos sin necesidad de aplicar las fórmulas ántes deducidas empleando procedimientos gráficos. Para esto empezariamos por determinar los momentos de los apoyos debidos á la carga aislada de los diversos tramos, aplicando la construccion explicada en el número anterior: una vez conocidos los momentos de dos apoyos consecutivos debidos á la carga aislada de un tramo, aplicariamos el método dado por Mr. Collignon para hallar gráficamente la influencia de aquella carga en los momentos de los demas apoyos; y si se observa que en general esta influencia es muy pequeña para el tercero ó cuarto tramo, á contar del que se considere el número de las construcciones que habria que hacer, se reduciria considerablemente, aunque siempre resulta este método poco expedito.

9. *Efecto simultáneo de la sobrecarga y de la carga permanente.*—A los máximos momentos debidos á la sobrecarga es preciso agregar siempre los correspondientes á la carga permanente. Ahora bien, si ésta se compusiese exactamente de los mismos pesos que obran para la sobrecarga en los diversos tramos, claro está que en el de órden k los momentos debidos á la carga permanente estarian dados por la misma parábola U V de la figura 5.ª; por consiguiente, correspondiendo simultáneamente momentos del mismo signo, tanto para la sobrecarga como para la carga permanente, no habria más que sumar las ordenadas del contorno mixtilíneo positivo marcado con línea gruesa, con las de la parte de parábola correspondiente á las mismas abscisas, é igualmente con las negativas.

Pero supongamos que los pesos correspondientes á la carga permanente fuesen distintos de las sobrecargas; entónces ya no corresponderian los momentos positivos y negativos de la parábola de la carga permanente con los de la sobrecarga del mismo signo, y sería preciso agregar á cada ordenada de dicha parábola, tanto la positiva como la negativa de los contornos poligonales de la sobrecarga, y escoger en cada punto la que diese una suma algebraica mayor en valor absoluto.

En el caso que generalmente se presenta en la práctica, el peso por metro lineal es constante en los diversos tramos, tanto para la sobrecarga como para la carga permanente, aunque ambos son distintos entre sí, y entónces no hace falta la construccion indicada en el párrafo anterior, porque ambos momentos son simultáneamente positivos ó negativos.

En efecto, observemos que las abscisas de los puntos U y V están determinadas por la ecuacion (16), y como el peso por metro lineal debido á la carga permanente entrará como factor comun en los tres términos de aquélla ecuacion, claro está que la posicion de los puntos U y V será independiente del mismo, y sólo dependerá de las relaciones que haya entre las longitudes de los diversos tramos.

Sumando las ordenadas de la parábola permanente y de los contornos ántes determinados, se formarán otros en que los diversos trozos pertenecerán á la parábola $y = \frac{1}{2} p' x^2$ para los tramos rectilíneos de los contornos, é $y = \frac{1}{2} (p + p') x^2$ para los curvilíneos, siendo p y p' respectivamente los pesos por metro lineal de la sobrecarga y la carga permanente.

Si de las dos intersecciones U y V de la parábola con el eje de las x, cae una sola dentro de la longitud del tramo, éste se dividirá en seis trozos en vez de siete, y si ambos caen fuera, se reducirán á cinco.

10. *Simplificacion del método general para el trazado de las líneas envolventes.*—Las explicaciones dadas en los dos números precedentes nos conducen al procedimiento que debe seguirse para la determinacion de los máximos valores de los momentos de flexion en los divervos tramos de la viga. Para esto se empezará por dividir en trozos el tramo que se considere (*Figura* 5.ª) en que la abcisa $M\,P = \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l_k$ $M\,Q = \frac{\alpha'_{n-k}}{\gamma'_{n-k}} l_k$ los puntos R y S son las intersecciones de la parábola debida á la carga aislada con la línea M N y que se determinan por la construccion de la figura 2.ª, y por último, los puntos U y V pertenecen á la parábola de la carga permanente, cuya ecuacion es la (18).

Fijados estos seis puntos, se levantarán pérpendiculares en los mismos á la línea M N, en cuyas verticales deberán hallarse situados los vértices del polígono mixtilíneo envolvente, para cuya determinacion sabemos que hay que considerar solamente los seis casos de la distribucion de la sobrecarga representados en la figura 4.ª, ó por mejor decir, tres, por ser los restantes sus complementarios. La marcha que se ha seguido hasta aquí para el trazado de las líneas de los momentos de flexion en cada uno de estos casos consiste en la aplicacion de la citada ecuacion (18), teniendo en cuenta, cada vez que se emplee, los tramos en que actúe la sobrecarga; pero este procedimiento puede simplificarse si recordamos que tanto las líneas rectas de los momentos como las parábolas están determinadas siempre que se conozcan dos puntos de las mismas, puesto que la ecuacion de estas últimas se reduce con un simple cambio de ejes coordenados á $y = \frac{1}{2} p_k x^2$; de manera que si se construye una plantilla determinada por esta ecuacion, ó prescindiendo del factor p_k por $y = \frac{1}{2} x^2$, en cuanto se conozcan dos puntos de la parábola podrá trazarse la misma, situándola de modo que su eje sea vertical.

Ahora bien, la simplificacion del método consiste en hallar las ordenadas de los puntos P y Q en vez de las correspondientes á los apoyos M N, pues de este modo, en vez de calcular tres casos distintos de la reparticion de la sobrecarga, no es preciso determinar más que uno solo, y áun éste se simplifica mucho. En efecto, conocida la ordenada del punto P para el caso 1.°, se hallará la del 2.°, restando la debida á la carga aislada, y averiguarémos en seguida los de los casos 4.° y 5.°, que son sus complementarios; pero segun se ve en la figura 3.ª, la ordenada del caso 3.° es igual á la del 2.°, y la del 6.° al 5.°, y como en el punto Q sucede una cosa enteramente análoga, resulta que no hay que calcular más que un solo caso de la reparticion de la sobrecarga, que unido á la parábola de la carga aislada y la de la carga permanente (debida al peso p_k por metro lineal), nos resolverán por completo el problema.

Si llamamos P P′ la ordenada correspondiente á este último caso, tendrémos, haciendo $x = \frac{\alpha_{k-2}}{\gamma_{k-1}} l_k$ en la ecuacion (18)

$$PP' = \frac{\pm p_1 l_1^3 \mp \cdots\cdots + \beta_{k-2} p_{k-1} l_{k-1}^3}{4 l_k \gamma_{k-1}} + \frac{1}{2} p_k x \left(x - \frac{l_k}{2}\right)$$

por que $\alpha'_{n-k} \gamma_{k-1} - \alpha_{k-2} \gamma'_{n-k} = D_k$, segun vimos en el número 7, y atendiendo á que para la carga permanente $p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_{k-1} = p_k$ se convierte en

$$PP' = \frac{\pm l_1^3 \mp \beta_1 l_2^3 \pm \cdots\cdots \beta_{k-2} l_{k-1}^3}{4 l_k \gamma_{k-1}} p_k + \frac{1}{2} p_k x \left(x - \frac{l_k}{2}\right)$$

y del mismo modo se obtiene

$$QQ' = \frac{\beta'_{n-k-1} l_{k-1}^3 - \beta_{n-k-2} l_{k+2}^3 + \cdots\cdots \pm l_n^3}{4 l_k \gamma'_{n-k}} p_k + \frac{1}{2} p_k (l_k - x) \left(\frac{l_k}{2} - x\right)$$

en cuyas expresiones los primeros términos son más fáciles de calcular que los momentos de los apoyos, y los segundos son las ordenadas P p y Q q (*Figura 2.ª*), debidas á la carga aislada.

Para determinar las correspondientes al caso 1.°, bastará tomar los términos positivos de los numeradores de P P′ y Q Q, y añadirlos tambien á P p y Q q.

11. *Valores máximos de los esfuerzos trasversales.*—La expresion general del esfuerzo trasversal (17) se convierte en

$$T_k(x) = \frac{\gamma_{n-k} (\pm p_1 l_1^3 \mp \cdots\cdots + \beta_{k-2} p_{k-1} l_{k-1}^3) - \gamma_{k-1} (\beta_{n-k-1} p_{k+1} l_{k+1}^3 \cdots\cdots \mp p_n l_n^3)}{4 l_k^2 D_k}$$
$$+ \frac{\gamma_{k-1} \beta'_{n-k} P_k l_n}{4 D_k} + p_n \left(\frac{1}{4} l_k - x\right). \quad (19)$$

y simplificando la fórmula anterior como lo hicimos en el número 8

$$T_k(x) = \frac{\gamma_{n-k} (F - G) - \gamma_{k-1} (H - I)}{4 l_k^2 D_k} + \frac{\gamma_{k-1} \beta_{n-k} p_k l_k}{4 D_k} + p_k \left(\frac{1}{4} l_k - x\right)$$

El primer término es independiente de x, lo que nos indica que el efecto de las cargas de todos los tramos, excepto el de órden k, se reduce á dos rectas F I y G H (*Figura* 6.ª), de las que la primera se refiere á los términos positivos, y la segunda á los negativos, que nos excusamos repetir cuáles sean, pues se conservan los mismos que citamos para los momentos.

Los dos últimos términos nos dan la ecuacion del esfuerzo trasversal debido á la carga aislada del tramo k, y que no es otra cosa que la derivada de la ecuacion de los momentos correspondientes al mismo caso, cuya representacion gráfica es la línea recta R O S, siendo el punto O la interseccion del eje de la parábola de los momentos de la carga aislada con la línea M N, que, como sabemos, está siempre comprendida entre los puntos P y Q. Si sumamos ahora la ordenada de F I con la parte positiva R O, y la de G H con O S, obtendrémos los dos contornos marcados con líneas gruesas, para los máximos positivos y negativos de los esfuerzos trasversales, de los que cada uno corresponde á dos casos distintos de reparticion de la sobrecarga.

Si queremos ahora hallar los máximos absolutos de los valores, tanto positivos como negativos, bastará trazar la recta U V, cuyas ordenadas son las diferencias de cada dos complementarias, y el punto O′, que pertenece al eje de la parábola de la carga permanente correspondiente á los mismos pesos, nos indica que entre M y O′ habrá que tomar el contorno poligonal positivo, y de O′ á N el negativo, los casos distintos de reparticion de la sobrecarga serán, por consiguiente, tres, á saber:

En el espacio	M O.	$k-5,\ k-3,\ k-1,\ k,\ k+2,\ k+4,\ k+6$.....
En el	O O′.	$k-6,\ k-4,\ k-2,\ k+1,\ k+3,\ k+5$........
En el	O′ N.	$k-6,\ k-4,\ k-2,\ k,\ k+1,\ k+3,\ k+5$....

que son el 1.°, 4.° y 5.° de la figura 4.ª

Estos casos podrán reducirse á dos si el punto O′ cae fuera de la longitud del tramo M N, y si está situado entre M y O, serán tres, á saber: el 1.°, 2.° y 5.°, dividiéndose, por consiguiente, el tramo en otros tantos trozos.

Conocidos los máximos esfuerzos trasversales debidos á la sobrecarga para tener en cuenta el efecto simultáneo de aquélla y de la carga permanente, en la hipótesis de que una y otra estén sometidas á pesos uniformemente repartidos en la longitud de los diversos tramos, aunque sean distintos en uno y otro caso, bastará trazar por el mismo punto O′ otra recta, que será distinta de la U V si el peso por metro lineal es diferente para la carga permanente, y como las ordenadas de esta recta tienen el mismo signo que los contornos ántes determinados, bastará sumarlos para obtener la envolvente definitiva de los esfuerzos trasversales.

Una vez conocidos los valores máximos de los momentos y esfuerzos trasversales, será muy fácil calcular las dimensiones de las vigas rectas; pero dejamos este punto para tratarlo más adelante.

§ 3.°—Propiedades de los números de las series que entran en las fórmulas generales.

Deducidas las fórmulas necesarias para la resolucion del problema que nos habiamos propuesto, y ántes de ocuparnos de las aplicaciones á varios casos particulares, que son los que generalmente se presentan en la práctica, vamos á estudiar várias propiedades que gozan los números que entran en dichas fórmulas, lo que nos conducirá á simplificarlas notablemente.

12. *Caso en que los tramos son desiguales.*—En el número 3 expresamos la ley de formacion de dos series de números α y α' que entran en las fórmulas deducidas en el párrafo primero; y en el número siguiente añadimos que el denominador $l_k(\alpha'_{n-k}\,\alpha_{k-1}-\alpha'_{n-k-1}\,\alpha_{k-2})$ es constante para todos los valores de k. En efecto, las ecuaciones (6) nos dan

$$l_k\,\alpha_{k-1}=2\,(l_{k-1}+l_k)\,\alpha_{k-2}-l_{k-1}\,\alpha_{k-3}$$

$$l_k\,\alpha'_{n-k-1}=2\,(l_{k-1}+l_k)\,\alpha'_{n-k}-l_{n-1}\,\alpha'_{n-k-1}$$

multiplicando los dos miembros de la primera por α'_{n-k}, los de la segunda por α_{k-2}, y restando ambas, se deduce

$$l_k\,(\alpha'_{n-k}\,\alpha_{k-1} - \alpha'_{n-k-1}\,\alpha_{k-2}) = l_{k-1}(\alpha'_{n-k+1}\,\alpha_{k-2} - \alpha'_{n-k}\,\alpha_{k-3})$$

en que el segundo miembro se obtiene sustituyendo $k-1$ en vez de k en el primero, y como del mismo modo se verificaria la igualdad entre esta expresion y la que se deduce de sustituir $k-2$ por k en la primera, y así sucesivamente, queda demostrado lo que deseábamos.

Tenemos, ademas, segun hemos visto en los números 4, 5 y 7

$$D_k = \alpha'_{n-k}\,\alpha_{k-1} - \alpha'_{n-k-1}\,\alpha_{k-2} = \alpha'_{n-k-1}\,\beta_{k-1} + \beta'_{n-k}\,\alpha_{k-1} =$$

$$= \alpha'_{n-k}\,\gamma_{k-1} - \gamma'_{n-k}\,\alpha_{k-2} = \frac{\gamma'_{n-k+1}\,\beta_{k-2} + \gamma_{k-2}\,\beta'_{n-k+1}}{2}. \qquad (20)$$

Estos números gozan tambien, en el caso general que estamos considerando, de algunas otras propiedades, pero éstas son de muy escasa utilidad práctica, porque los números de las series entran en las fórmulas como factores de las longitudes de los tramos elevadas al cubo, por cuya circunstancia no se prestan á simplificaciones, y no nos detendrémos más sobre este punto, pasando desde luégo al estudio de un caso particular que es de mucha aplicacion.

13. *Caso de las vigas simétricas de tramos intermedios iguales.*—Llamemos l á la longitud de todos los tramos, con excepcion del primero y último, y $\delta\, l$ la de éstos, si suponemos que sea δ la relacion entre cada uno de ellos y los restantes.

Las dos series α y α' son iguales y se convierten en

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 2\,(1+\delta) \\ \alpha_2 = 4\,\alpha_1 - \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = 4\,\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

que se forman segun una ley muy sencilla. Las dos series de los números β y γ se convierten en

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 - \alpha_0 = \beta_1 & \alpha_0 + \alpha_1 = \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 = \beta_3 = 4\,\beta_2 - \beta_1 & \alpha_2 + \alpha_3 = \gamma_3 = 4\,\gamma_2 - \gamma_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = \beta_{n-1} = 4\,\beta_{n-2} - \beta_{n-3} & \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = \gamma_{n-1} = 4\,\gamma_{n-2} - \gamma_{n-3} \end{array}\right\} \qquad (22)$$

que siguen tambien la misma ley.

(*Se continuará.*)

P. DE ALZOLA.