

MADRID, 15 DE MAYO DE 1870.

TOMO XVIII.

NÚM. 10.

TEORÍA DEL CÁLCULO DE LAS VIGAS RECTAS.

(Continuacion.)

5. *Determinacion de las reacciones de los apoyos.*—Este estudio es necesario, no sólo para poder comprobar las dimensiones de los apoyos que sostengan la viga, sino que á veces puede servir de punto de partida para el cálculo de aquélla, sin necesidad de determinar los momentos de flexion. En efecto, supongamos, por ejemplo, que se trata de una viga de Γ cuyas cabezas están unidas por cruces de San Andres ú otro sistema articulado: si conociésemos las reacciones, claro está que el cálculo de las dimensiones de las diversas piezas de la viga se reduciría á un sencillo problema de Estática. Ahora bien, las reacciones de los apoyos (suponiendo siempre que se desprecia la resistencia á la flexion de la pared vertical) serian las mismas que en una viga de Γ de pared llena, y que entran en las fórmulas de los dos números anteriores, puesto que dependerian siempre de las condiciones de coincidencia y continuidad del eje neutro en los puntos de apoyo, y es cosa ya demostrada en otros tratados de la materia.

Conocida la fórmula general, que nos determina los esfuerzos trasversales (10), es fácil hallar las reacciones de los apoyos por la relacion (2)

$$R_k = T_k - T_{k-1} + p_{k-1} l_{k-1}$$

que sustituyendo en vez de T_k y T_{k-1} sus valores, y observando que

$$\gamma'_{n-k+1} \beta_{k-2} + \gamma_{k-2} \beta'_{n-k+1} = 2 (\alpha'_{n-k+1} \alpha_{k-2} - \alpha'_{n-k} \alpha_{k-3}) = 2 D_k$$

como se demuestra sustituyendo β y γ por sus valores en funcion de α , se convierte en

$$R_k = \frac{(l_{k-1} \gamma'_{n-k} + l_n \gamma'_{n-k+1}) (\pm p_1 l_1^3 + \dots + \beta_{k-2} p_{k-1} l_{k-1}^3)}{4 l_{k-1} l_k^2 D_k} + \\ + \frac{(l_k \gamma_{k-2} + l_{k-1} \gamma_{k-1}) (\beta'_{n-k} p_k l_k^3 - \dots \pm p_n l_n^3)}{4 l_{k-1} l_k^2 D_k} + \frac{1}{4} p_{k-1} l_{k-1} \left(3 - 2 \frac{l_{k-1}}{l_k} \right) + \frac{1}{4} p_k l_k; \quad (12)$$

fórmula por medio de la cual podrémos calcular directamente las reacciones, sin necesidad de conocer los momentos ni los esfuerzos trasversales.

Pero ¿existe entre las reacciones de los apoyos alguna relacion análoga al teorema de los tres momentos ó de los cuatro esfuerzos trasversales? La preferencia que se ha dado al empleo y la determinacion directa de los momentos en vez de los esfuerzos trasversales, consiste precisamente en que no se han llegado á establecer ecuaciones tan sencillas entre las reacciones; pero nosotros nos proponemos examinar este punto para ver si hay por lo ménos algunos casos en que se lleguen á obtener expresiones de fácil aplicacion.

El empleo del método directo de que hemos hablado anteriormente nos conduciría á ecuaciones entre todas las reacciones comprendidas entre una de las extremidades y los diversos apoyos; pero no pudiendo eliminarse en general ni siquiera una parte de las reacciones, se llega á ecuaciones muy complicadas; pero como, segun sabemos, lo mismo da para seguir el procedimiento directo, tomar como punto de partida las ecuaciones generales que expresen las condiciones á que ha de satisfacer el eje neutro de la viga en los puntos de apoyo, ó las de los tres momentos que constituyen un sistema de ecuaciones equivalente, la cuestion queda, por consiguiente, reducida á investigar si es posible establecer una relacion entre el momento de un apoyo y una ó varias de las reacciones, del mismo modo que llegamos á la expresion (11), que resolvía aquel punto para los esfuerzos trasversales.

Para esto tenemos

$$R_k = T_k - T_{k-1} + p_{k-1} l_{k-1},$$

y sustituyendo en vez de T_k y T_{k-1} sus valores (4)

$$R_k = - \frac{l_k M_{k-1} - (l_{k-1} + l_k) M_k + l_{k-1} M_{k+1}}{l_{k-1} l_k} + \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} p_k l_k$$

y sumando y restando al numerador del primer término, los dos miembros de la ecuacion (3) de los momentos

$$R_k = \frac{3(l_{k-1} + l_k)}{l_{k-1} l_k} M_k + \frac{(l_k - l_{k-1})(M_{k+1} - M_{k-1})}{l_{k-1} l_k} + \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} \left(1 - \frac{l_{k-1}}{2l_k}\right) + \frac{1}{2} p_k l_k \left(1 - \frac{l_k}{2l_{k-1}}\right) \quad (13)$$

que nos determina la reaccion en funcion de tres momentos consecutivos; pero, como no pueden eliminarse M_{k-1} y M_{k+1} de esta ecuacion, expresándolos en valores en que entren un corto número de reacciones, resulta que, en general, no se consigue obtener el momento M_k en funcion de una expresion sencilla de las reacciones de los apoyos.

Pero supongamos que los dos tramos consecutivos l_{k-1} y l_k sean iguales, y la fórmula anterior se simplifica notablemente, pues se convierte en

$$R_k = \frac{6 M_k}{l} + \frac{1}{4} (p_{k-1} + p_k) l \quad (14)$$

expresion sumamente sencilla entre el momento y la reaccion del mismo apoyo, y que creemos que no se habia hallado hasta el dia, pues hemos visto en todas las *Memorias* que conocemos, relativas á las vigas de tramos iguales, ó siendo distintos sólo los extremos, deducir las reacciones formando el círculo vicioso de pasar por los esfuerzos trasversales, siendo así que es mucho más sencillo proceder directamente aplicando la fórmula anterior.

Si los cuatro tramos consecutivos l_{k-2} , l_{k-1} , l_k y l_{k+1} son iguales, el teorema de los tres momentos, ó el de los cuatro esfuerzos trasversales, nos conducen á la relacion siguiente:

$$R_{k-1} + 4 R_k + R_{k+1} = \frac{1}{4} (p_{k-2} + p_{k+1}) l + \frac{11}{4} (p_{k-1} + p_k) l$$

ó sea el teorema de las tres reacciones, de manera que vemos que existe entre estas fuerzas una relacion análoga á la de los momentos, para el caso en que tenga la viga cuatro tramos consecutivos iguales.

Si todos los tramos son iguales, tendremos $n-3$ ecuaciones de la misma forma que la anterior; además, la primera y última, que serán:

$$4 R_2 + R_3 = \frac{10}{4} p_1 l + \frac{11}{4} p_2 l + \frac{1}{4} p_3 l$$

y su simétrica; pero, como el número de incógnitas es $n+1$, habrá que añadir las dos ecuaciones del equilibrio Estático. Para esto bastará tomar los momentos en el segundo apoyo, según indicamos también en el número anterior, y tendremos, aplicando la fórmula (14),

$$M_2 = \frac{l R_2}{6} - \frac{1}{24} (p_1 + p_2) l^3 = \frac{1}{2} p_1 l^3 - l R_1$$

ó sea

$$6 R_1 + R_2 = \frac{13}{4} p_1 l + \frac{1}{4} p_2 l$$

que con la relativa á la otra extremidad completará el sistema de las $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, cuya resolución es muy sencilla; pero es inútil que nos ocupemos de ella, una vez que hemos determinado anteriormente las fórmulas generales de las reacciones.

§ 2.º—Determinación de los máximos valores de los momentos de flexión y de los esfuerzos transversales. Líneas envolventes.

6. *Momento de flexión y esfuerzo transversal en un punto cualquiera distinto de los apoyos.*—Sea cual fuere la distribución de las cargas que actúen en los diversos tramos de la viga, si consideramos un punto del tramo k , que lo supondremos sometido al peso p_k por metro lineal, y llamando $M_k(x)$ el momento en un punto cualquiera, situado á una distancia x de la extremidad del tramo, tomando para eje de las x el neutro de la viga y para eje de las y una línea vertical que pase por el apoyo de orden k , tendremos

$$M_k(x) = M_k - T_k x + \frac{1}{2} p_k x^2 \quad (15)$$

que es la ecuación de una parábola de segundo grado, que se convertirá en una línea recta si $p_k = 0$, es decir, si el tramo k no sostiene carga alguna.

La parábola anterior tiene su eje vertical; y además, es exactamente igual á la determinada por la ecuación $y = \frac{1}{2} p_k x^2$, con la sola diferencia de que una y otra ocupan posiciones distintas respecto de los ejes coordenados, si bien éstos se conservan paralelos en uno y otro caso. En efecto, sustituyendo en esta ecuación x é y por $x+a$ é $y+b$, claro está que podrían determinarse las dos indeterminadas a y b , con la condición de hacer idénticas ambas ecuaciones; de manera que esto nos prueba que cualesquiera que sean los pesos que actúan en los demás tramos de la viga, siempre que el de orden k conserve el mismo p_k , las parábolas de los momentos son iguales, aunque recorrerán diversas posiciones, moviéndose de manera que sus ejes se conserven siempre verticales.

Si en la expresión general del momento (15) se hacen $x=0$ y $x=l_k$, se convertirá respectivamente en M_k y M_{k+1} . Los puntos de intersección de esta parábola con el eje de la x están determinados por

$$x = \frac{T_k \pm \sqrt{T_k^2 - 2 M_k}}{p_k} \quad (16)$$

el eje de dicha curva por $x = \frac{T_k}{p_k}$, y los demás puntos se hallarán aplicando aquella fórmula.

Para determinar gráficamente la curva, supondremos que se conozcan simplemente las ordenadas de los dos puntos de apoyo Mm y Nn (Figura 1.^a), las que, para mayor sencillez, las consideraremos divididas por el factor comun p_k . Sea O el vértice de la parábola que se trata de construir y de la que conocemos simplemente los puntos m y n , y tomemos en vez de los ejes coordenados Mx y My , las dos líneas paralelas que pasan por el vértice. Designemos por x' é y' x'' é y'' las ordenadas respecto de estos ejes de los puntos m y n , y por d la diferencia $m'n$ de las dos ordenadas. Tendremos

$$y' = \frac{1}{2} x'^2 \quad y'' = \frac{1}{2} x''^2$$

y por consiguiente

$$y' - y'' = \frac{1}{2} (x'^2 - x''^2) = \frac{1}{2} (x' + x'') (x' - x'')$$

pero

$$y' - y'' = d, \quad x' + x'' = l_k, \quad \text{luego } x' - x'' = \frac{2d}{l_k}$$

que da

$$x' = \frac{1}{2} l_k + \frac{d}{l_k} \quad \text{y} \quad x'' = \frac{1}{2} l_k - \frac{d}{l_k}$$

de manera que la distancia del apoyo M al eje de la parábola es igual á la mitad del tramo, ménos una cuarta proporcional determinada por $l_k : d :: l : x$.

(Se continuará.)

P. DE ALZOLA.

EJECUCION DE LAS OBRAS PÚBLICAS.

SISTEMAS QUE PARA REALIZARLA PUEDEN EMPLEARSE, CONSIDERACIONES ACERCA DE LOS PRINCIPIOS Á QUE CONVIENE SE AJUSTE SU CONTRATACION Y MEDIOS DE APLICARLOS.

II.

Consignado ya que el principal inconveniente de la contratacion por unidades no está en que las obras cuesten más de lo presupuesto, con tal de que cuesten lo justo, sino en la perturbacion que esto ocasiona en la marcha de la administracion de este ramo; visto que esto procede de la indeterminacion del proyecto, que es origen del riesgo que por este concepto corre la Administracion, dado semejante sistema, y que en el de abono por tanto alzado habria de dar lugar al pago de un seguro, que por la dificultad de su determinacion, procedente de la misma causa, ofreceria inconvenientes no ménos graves, es, á todas luces, evidente que en las circunstancias del proyecto es donde se ha de buscar el remedio de ese defecto, cuyas consecuencias se extienden á cualquiera de

los sistemas que se adopten como base de los contratos de obras públicas; puesto que, constituyendo, como ya indiqué anteriormente, el medio de obtener la definicion de la materia objeto del contrato, es de primera importancia, cualesquiera que sean los términos en que éste se verifique, que esa definicion sea clara y precisa, en cuanto á conseguirlo se pueda aspirar.

Considerados los proyectos bajo este punto de vista, constan de dos elementos principales: la medicion de las distintas clases de obra que han de ejecutarse, y la determinacion de su naturaleza. Por consiguiente, lo que importa averiguar es en cuál de estos dos elementos toma su origen el inconveniente señalado, ó si es en ambos, y en todo caso á qué circunstancias es debido.

La medicion de las obras, en cuanto depende de su forma, es el resultado de operaciones geométricas que, por lo tanto, permiten aspirar al grado de exactitud que pueda apetecerse. A esto se debe que nunca sea objeto de controversia, en la ejecucion de los contratos, la medicion de las obras.

No sucede otro tanto en lo tocante á su naturaleza; porque, así en una como en otra, de las dos