

heróico tratamiento, tendrá al fin la misma suerte que tuvo aquel tipo, que fué condenado por sus herejías, y se retiró todavía joven de la vida mundana á la vida contemplativa.

En el siglo XIX no caben estos prodigios; no caben estos que podemos llamar monstruos de ciencia.

P.

ARCOS METÁLICOS.

PRESION MÁXIMA PRODUCIDA POR UN PESO REPARTIDO
UNIFORMEMENTE SOBRE LA FIBRA MEDIA Y POR DILATACIONES
INDEPENDIENTES DE LAS CARGAS.

Ya saben nuestros lectores que con este epigrafe se ha publicado un artículo del Sr. X en el número 155 de *La Gaceta industrial*.

Como alumno de la Escuela de Caminos, he recibido de mis profesores el encargo de estudiarlo y contestar. Intento llevar á cabo mi cometido lo menos mal que me permitan mis escasas fuerzas.

Refiriéndose el articulista de *La Gaceta* al curso de *Mecánica aplicada* de Mr. Bresse, dice: «Omite dicho autor el caso en que la carga está repartida uniformemente, según la longitud de la fibra media del arco, que ocurre cuando se trata de proyectar

armaduras curvas para cubiertas de edificios. Vámos, pues, á dar la solución, siguiendo el mismo camino que el Ingeniero francés, cuya magnífica obra desmerece muy poco (*es decir, desmerece*) con esta omisión, puesto que tan fácil nos ha sido obtenerla.»

Ya que la modestia, que tanto honra al Sr. X, no le ha permitido hacer su panegirico, nosotros nos encargamos de hacerlo por él, demostrando hasta qué punto ha subsanado la omisión y hasta qué punto le ha sido fácil.

«Máximo de presión longitudinal por unidad de superficie en una sección dada.» Así encabeza su primer párrafo el Sr. X, y para hallar dicho máximo usa, ó mejor dicho, propone que se use la fórmula de Bresse.

$$(1) \quad q = \frac{E_r}{e} \left(-N \pm \frac{Xh}{2r^2} \right),$$

como ya lo había propuesto este autor para todos los casos; expresa á continuación el significado de las letras que entran ahora, y de las que entrarán después en esta fórmula; y preciso es confesar que esto lo hace bien, tanto más, cuanto que en armonía con nuestras ideas, quita de la escena la letra φ para reemplazarla por la ψ , que por su *bella forma y apreciables cualidades* introduce maravillosas simplificaciones en el cálculo. Pasa luego á determinar X ; y allí, suponiéndose el héroe del drama, encarga al lector que supla la figura, que integre, que sustituya por efecto de las igualdades $T = p \varphi \psi$, $Q = n p \varphi \psi$ (siendo n la relación del empuje conocido Q á la cantidad también conocida $p \varphi \psi$), y que por último reduzca.

¿Por qué hacer trabajar inútilmente al lector? ¿No era más breve decir: en la página 260 del Bresse, línea 10, se halla esta fórmula:

$$X = -p \varphi^2 (\cos \alpha - \cos \varphi + \alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) - Q \varphi (\cos \alpha - \cos \varphi);$$

elimínese de ella Q por medio de la relación

$$(a) \quad Q = n T = n p \varphi \psi;$$

reduzcase, y se llegará á una fórmula, en la que con reemplazar

φ por ψ

se hallará la mismísima que buscamos.

$$X = -p \varphi^2 [n \psi (\cos \alpha - \cos \psi) - \psi \sin \psi + \cos \alpha - \cos \psi + \alpha \sin \alpha];$$

Del mismo defecto adolece el articulista al determinar la fórmula que dá el valor de N . ¿No hubiera sido mejor que en vez de apropiarse la confección de la fórmula, hubiera dicho simplemente: En la página citada de Bresse, línea 11, se encuentra esta fórmula:

$$N = -Q \cos \alpha - p \varphi \alpha \sin \alpha;$$

basta eliminar de ella Q por la relación (a), y reducir, para obtener la nuestra,

$$(2) \quad -N = p \varphi (n \psi \cos \alpha + \alpha \sin \alpha),$$

previa, por supuesto, la sustitución de φ por ψ .

Vemos, pues, que toda la parte científica que hasta aquí presenta el escritor de la *Gaceta* la puede firmar agregando: «Es copia.»

En el párrafo que sigue á este en el artículo que nos ocupa, se presenta el Sr. X con todo su heroísmo, difundiendo á manos llenas ideas originales, completamente originales (salva una mala apreciación de nuestra parte); pero ideas tan simples y tan maravillosamente enlazadas con una principal, en que todas están comprendidas, que su conjunto solo es comparable á las mónadas de Leibnitz.—Después sabremos cuál es la idea principal, la mónada superior que las comprende á todas. Dice así el párrafo: «Signos del momento X .—El valor que hemos encontrado para X es.

$$X = -p \varphi^2 (n \psi (\cos \alpha - \cos \psi) - \psi \sin \psi + \cos \alpha - \cos \psi + \alpha \sin \alpha).$$

»en lugar del obtenido por Bresse en su hipótesis (pág. 279), que es

$$X = \frac{1}{2} p \rho^2 (\sin^2 \psi - \sin^2 \alpha) - 2 n p \rho^2 \sin \psi (\cos \alpha - \cos \psi),$$

»que puede ponerse bajo la forma

$$X = \frac{1}{2} p \rho^2 (\cos \alpha - \cos \psi) (\cos \alpha + \cos \psi - 4 n \sin \psi),$$

»y hallarse fácilmente los máximos y mínimos. La fórmula obtenida en estos apuntes no es susceptible de transformarse en un producto, y por tanto no es posible hallar los máximos y mínimos sino dando valores particulares á varias de las cantidades y aplicando el procedimiento general algebraico. No se presta, pues, á ser reducida á tablas análogas á la V de la obra de Bresse.

»Para discutir esta fórmula, no hay más remedio que proceder en cada caso particular á la verificación numérica por medio de sustituciones sucesivas, y aproximar en los puntos donde se encuentran los máximos y mínimos. De esta manera se conocerá el valor y signo de X en cada porción de la viga, y se sabrá si la máxima presión corresponde al intrados ó al extrados de la misma. No habrá, pues, ambigüedad en los signos de X al tratar de sustituir su valor en el de α .

Ya sabe el lector que se trata de hallar los valores de α entre los que X es constantemente positivo, como asimismo aquellos entre los cuales es negativo, para sustituir su valor en la fórmula (1) con el signo + ó con el -, según sea lo uno ó lo otro, y determinar el máximo de q entre cada dos de esos valores de α . También sabe el lector, que no siendo dichos valores otros que las raíces de la ecuación

$$X = 0,$$

Mr. Bresse, para determinarlas en el caso que detalla, transforma la expresión de X en un producto de dos factores, y resuelve las ecuaciones que resultan de igualarlos á cero.

Recordemos ahora lo que sobre el particular dice el Sr. X. «La fórmula obtenida en estos apuntes no es susceptible de transformarse en un producto, y por tanto no es posible hallar los máximos y mínimos sino dando valores particulares, etc.» El razonamiento, pues, que ha llevado al articulista á tan inocente conclusión, se formula en el siguiente sorites: «No pudiéndose transformar X en un producto, es imposible hallar las raíces de la ecuación $X = 0$. No siendo posible determinar las raíces, tampoco lo es saber los signos de X. Luego no pueden hallarse los máximos y mínimos, etc.»

Vamos á demostrar al Sr. X que sin hallar las raíces de $X = 0$ se pueden conocer los signos de X; después le demostraremos también que pueden hallarse los máximos y mínimos.

La fórmula de X puede escribirse así:

$$(3) \quad X = p \rho^2 [-(n \psi + 1) \cos \alpha - \alpha \sin \alpha + (n \psi + 1) \cos \psi + \psi \sin \psi];$$

cuyo valor para $\alpha = 0$ es siempre positivo. En efecto, ese valor es:

$$X_0 = p \rho^2 [-(n \psi + 1) + (n \psi + 1) \cos \psi + \psi \sin \psi];$$

y será positivo siempre que se verifique

$$-(n \psi + 1) + (n \psi + 1) \cos \psi + \psi \sin \psi > 0;$$

ó su transformada

$$(4) \quad \cotg \frac{\psi}{2} - n - \frac{1}{\psi} > 0.$$

Recordemos que la expresión de n es (Bresse, pág. 249 y siguiente)

$$n = 2 F' \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} = \frac{1}{2} \frac{a}{f} \left(1 - \frac{3}{7} \frac{f^2}{a^2} + \frac{63}{735} \frac{f^4}{a^4} - \frac{7263}{169785} \frac{f^6}{a^6} + \dots \right) \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$$

en que a representa la semi-luz y f la flecha.

Recordemos también que los valores de λ y λ' son (Bresse, pág. 239, 240 y 241)

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \psi \left(\sin^2 \psi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \psi \frac{\sin \psi}{\psi} \right)}{\frac{1}{4} - \frac{5}{2} \cos^2 \psi - \psi \sin \psi \cos \psi + \frac{9}{4} \cos \psi \frac{\sin \psi}{\psi}} = \frac{5}{2} \left(\frac{\sin \psi}{\psi} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{105} \psi^2 + \frac{1}{441} \psi^4 - \dots \right) \\ \lambda' = \frac{\sin^2 \psi (\psi + \sin \psi \cos \psi)}{\psi + 2 \psi \cos^2 \psi - 3 \sin \psi \cos \psi} = \frac{15}{2 \psi^2} \left(1 - \frac{10}{21} \psi^2 + \frac{17}{147} \psi^4 - \frac{8254}{509355} \psi^6 + \dots \right) \end{cases}$$

Recordemos, por último, que $r < \frac{h}{2}$ y que $\frac{r^2}{a^2}$ es una cantidad muy pequeña, cuyo máximo práctico se

ha fijado en $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$ (Bresse, pág. 234).

Se ve por las fórmulas (5) que cuando ψ crece desde cero hasta $\frac{\pi}{2}$, λ y λ' decrecen respectivamente desde $\frac{5}{2}$ hasta 1, y desde ∞ hasta 1.

Puede, pues, sentarse que

$$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} < 1;$$

y por consiguiente

$$n < 2 F' < \frac{1}{2} \frac{a}{f} \left(1 - \frac{3}{7} \frac{f^2}{a^2} + \frac{68}{735} \frac{f^4}{a^4} \right); \quad (1)$$

de donde, en virtud de la relación $\tan \frac{\psi}{2} = \frac{f}{a}$,

$$n < \frac{1}{2} \cotg \frac{\psi}{2} - \frac{1}{2} \tan \frac{\psi}{2} \left(\frac{3}{7} - \frac{68}{735} \tan^2 \frac{\psi}{2} \right).$$

Pero

$$\frac{3}{7} - \frac{68}{735} \tan^2 \frac{\psi}{2}$$

toma su valor mínimo para

$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Luego la desigualdad (4) se verificará forzosamente si se verifica la siguiente:

$$\frac{1}{2} \cotg \frac{\psi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1729}{5145} \tan \frac{\psi}{2} - \frac{1}{\psi} > 0.$$

Dando á esta la forma

$$\frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2} + \frac{1729}{5145} \frac{\psi}{2} \sin^2 \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} > 0,$$

y sustituyendo el seno y el coseno por sus desarrollos en series, series que son convergentes, se convertirá en

$$\frac{14}{5145} + \frac{1358}{15435} \left(\frac{\psi}{2} \right)^2 - \frac{556}{33075} \left(\frac{\psi}{2} \right)^4 + \frac{974}{694575} \left(\frac{\psi}{2} \right)^6 - \dots > 0;$$

que evidentemente se verifica para todos los valores de ψ desde cero hasta $\frac{\pi}{2}$. Las raíces de la ecuación

$$(6) \quad \frac{dX}{d\alpha} = p r^2 (n \psi \sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0$$

convertirán á X en máximo ó mínimo, según que hagan negativa ó positiva la segunda derivada:

$$(7) \quad \frac{d^2 X}{d\alpha^2} = p r^2 [(n \psi - 1) \cos \alpha + \alpha \sin \alpha].$$

(1) Tomamos los tres primeros términos de la serie; y sabido es que en una serie de términos alternativamente positivos y negativos, la suma de los n primeros es > 0 ó < 0 que el valor de la serie, según que el término de lugar n sea > 0 ó < 0 .

$\alpha = 0$ es una de las raíces. Sustituida en la última expresión, dá

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = p \varphi^2 (n \psi - 1).$$

Mas hemos demostrado que

$$n < \frac{1}{2} \cotg \frac{\psi}{2};$$

por consiguiente

$$n \psi < \frac{\psi}{2} \cotg \frac{\psi}{2} = \frac{\frac{\psi}{2}}{\tg \frac{\psi}{2}} < 1,$$

de donde

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = p \varphi^2 (n \psi - 1) < 0.$$

$\alpha = 0$ hace, pues, un máximo siempre á X .

De la ecuacion (6) se deduce

$$(8) \quad \frac{\alpha}{\tg \alpha} = n \psi.$$

El primer miembro de esta ecuacion crece continuamente de cero á uno cuando α decrece desde $\frac{\pi}{2}$ á cero. Luego solo habrá un valor de α que la verifique. Luego la ecuacion (6) no tiene más que dos raíces $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_1$; y como la primera hace á X un máximo, la segunda la hará un mínimo.

Observando ahora que $\alpha = \psi$ es raíz de la ecuacion $X = 0$, y recordando que

$$X_0 > 0,$$

se deduce:

1.º Si

$$(9) \quad \alpha_1 > \psi$$

X es constantemente positiva desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \psi$ (1), es decir, siempre.

2.º Si

$$(10) \quad \alpha_1 < \psi$$

$X = 0$ tendrá una raíz

$$\alpha_2 > 0, y < \psi;$$

y por lo tanto X será positiva desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \alpha_2$, y negativa desde este valor hasta $\alpha = \psi$.

Importa, pues, investigar qué combinacion de datos realiza las condiciones (9), y cuál la (10).

La condicion

$$(11) \quad n = \frac{1}{\tg \psi}$$

(1) No se olvide que la naturaleza misma de la cuestion que nos ocupa hace

$$\alpha < \psi < \frac{\pi}{2}$$

implica esta otra

$$\alpha_1 = \psi,$$

como se vé fácilmente multiplicando los dos miembros de aquella por ψ y comparando con la (8).

Por otra parte, puede verse que entre los valores límites que ψ toma en la práctica, se verifica el siguiente

Teorema: Si ψ_1 es raíz de la ecuacion (11), todo valor de ψ que satisfaga la condicion

$$n > \frac{1}{\tg \psi}$$

es mayor que ψ_1 ; y menor todo el que haga

$$n < \frac{1}{\tg \psi}.$$

Estas desigualdades pueden ponerse respectivamente bajo la forma

$$n \psi > \frac{\psi}{\tg \psi}$$

$$n \psi < \frac{\psi}{\tg \psi}.$$

Demuestran entonces bien claramente que α_1 será menor ó mayor que ψ , segun que esta cantidad verifique á la una ó á la otra.

De todo lo dicho resultan, pues, dos conclusiones importantes, que resumen cuanto necesitamos saber de los signos de X .

1.ª Cuando ψ verifique una de las condiciones

$$n < \frac{1}{\tg \psi}$$

X será constantemente positiva desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha = \psi$.

2.ª Cuando verifique á esta otra

$$n > \frac{1}{\tg \psi}$$

X será positiva desde $\alpha = 0$ á $\alpha = \alpha_2$, y negativa desde α_2 á ψ .

Ya que ha visto el Sr. X la manera de fijar los signos de X ; ya que hemos puesto de manifiesto su ingratitud para con la letra que le sirve de pseudónimo, nos proponemos ahora decirle cómo se hallan los máximos y mínimos de g .

El estudio precedente nos indica que todos los casos prácticos se pueden agrupar en dos generales, caracterizados respectivamente por $n < \frac{1}{\tg \psi}$ y

$$n > \frac{1}{\tg \psi}.$$

Primer caso: $n < \frac{1}{\tg \psi}$.

Por ser $X > 0$ en este caso para todos los valores de α desde cero á ψ , entrará siempre con el signo +.

El valor (2) encontrado para $-N$, nos demuestra que esta cantidad es esencialmente positiva; y por tanto en este caso como en el siguiente entrará siempre con el mismo signo.

Sustituyendo, pues, en la expresion (1), resultará:

$$q = p \rho \frac{E_1}{e} \left[n \psi \cos \alpha + \alpha \sin \alpha + \frac{\rho h}{2 r^2} \right] - (n \psi + 1) \cos \alpha - \alpha \sin \alpha + (n \psi' + 1) \cos \psi + \psi \sin \psi \Bigg].$$

Observemos que, para todos los valores de α desde cero a ψ ,

$$q > 0,$$

por componerse sus valores de los correspondientes de $-N$ y $+X \frac{\rho h}{2 r^2}$, ambos positivos.

Solamente harán máximo ó mínimo á q la raíces α de la ecuacion

$$(12) \quad \frac{dq}{d\alpha} = p \rho \frac{E_1}{e} \left\{ \left(1 - \frac{\rho h}{2 r^2} \right) \alpha \cos \alpha - \left[n \psi \left(1 - \frac{\rho h}{2 r^2} \right) - 1 \right] \sin \alpha \right\} = 0;$$

de las que una es evidentemente

$$\alpha = 0.$$

Sustituyendo este valor de α en la expresion

$$(13) \quad \frac{d^2 q}{d\alpha^2} = p \rho \frac{E_1}{e} \left[\left\{ 2 - n \psi - (1 - n \psi) \frac{\rho h}{2 r^2} \right\} \cos \alpha + \left(\frac{\rho h}{2 r^2} - 1 \right) \alpha \sin \alpha \right],$$

resulta:

$$\frac{d^2 q}{d\alpha^2} = p \rho \frac{E_1}{e} \left[2 - \left\{ n \psi + (1 - n \psi) \frac{\rho h}{2 r^2} \right\} \right] < 0.$$

En efecto,

$$2 - \left\{ n \psi + (1 - n \psi) \frac{\rho h}{2 r^2} \right\}$$

será forzosamente negativo siempre, si lo es para un valor de la cantidad comprendida entre las llaves menor que el mínimo que puede tomar en la práctica.

La fraccion $\frac{\rho h}{2 r^2}$ es igual á $\frac{\rho h \sin \psi}{2 r^2 \sin \psi} = \frac{a h}{2 r^2 \sin \psi}$, en virtud de la relacion $\rho \sin \psi = a$.

Es evidente que, para colocarnos en las condiciones que deseamos, debemos dar un valor mínimo á esta fraccion, que generalmente es muy grande, como veremos ahora, mientras

$$n \psi < 1$$

segun sabemos.

Puede ponerse

$$\frac{a h}{2 r^2 \sin \psi} = \frac{1}{\sin \psi} \cdot \frac{h}{2 a} \cdot \frac{a^2}{r^2},$$

expresion que se hará minima, cuando se hagan minimos simultaneamente sus tres factores. El mínimo del primero es 1; el del segundo $\frac{r}{a}$, en fuerza

de la relacion que conocemos $r < \frac{h}{2}$; y el del tercero 400, segun lo dicho al principio de este artículo. El valor que buscamos para la fraccion es, pues, 20. Debemos, en segundo lugar, hacer mínimo el factor $(1 - n \psi)$; y si bien es verdad que no puede conseguirse sin hacer máximo al otro término $n \psi$, nada importa, en atencion á que mientras menor sea $(1 - n \psi)$, menor será tambien la influencia de $\frac{\rho h}{2 r^2}$.

El valor máximo que en la práctica toma $n \psi$ para $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$, suponiéndose limites de ψ

$10^\circ + 48'$ y 90° , ó $\frac{2 \psi}{\pi} = 0,12$ y $\frac{2 \psi}{\pi} = 1$, corresponden al limite menor, y no llega á 0,65. El limite absoluto superior, tomando como limite inferior práctico de $\frac{r^2}{a^2}$ 0,0005, corresponde tambien á $\frac{2 \psi}{\pi} = 0,12$.

y es inferior á 0,9. Poniendo, pues, $n \psi = 0,9$ nos habremos colocado en el caso desfavorable que deseábamos. La expresion que discutimos es, sin embargo, negativa aun en este caso.

El valor q_0 de q correspondiente á $\alpha = 0$, es siempre por lo tanto un máximo.

De la ecuacion (12) se deduce:

$$(14) \quad \frac{\alpha}{\tan \alpha} = n \psi + \frac{1}{\frac{\rho h}{2 r^2} - 1};$$

la cual solo tiene una raíz α' . Luego la (12) solo tiene dos raíces $\alpha = 0$, y $\alpha = \alpha'$; y como hemos demostrado que la primera hace un máximo á q , la segunda lo hará un mínimo.

Comparando las ecuaciones (8) y (14) se vé claramente que

$$\alpha' < \alpha_1.$$

La diferencia de estas cantidades no es, sin embargo, muy grande, por ser muy pequeña la fraccion

$$\frac{1}{\frac{\rho h}{2 r^2} - 1}.$$

Pueden verificarse no obstante todas las condiciones siguientes:

$$1.^a \quad \alpha' < \psi,$$

que se satisfará forzosamente cuando ψ haga

$$n = \frac{1}{\tan \psi};$$

$$2.^{\circ} \quad \alpha' = \psi;$$

$$3.^{\circ} \quad \alpha' > \psi.$$

Si se presenta la primera, q tiene dos máximos, q_0 y q_ψ , que corresponden respectivamente á $\alpha = 0$ y $\alpha = \psi$.

Si la que se verifica es la segunda ó la tercera, q_0 es el máximo único.

Puede verse por medio de la ecuación (14) que estas tres condiciones están comprendidas respectivamente en estas otras:

$$1.^{\circ} \quad \psi (\cotg \psi - n) < \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} - 1};$$

$$2.^{\circ} \quad \psi (\cotg \psi - n) = \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} - 1};$$

$$3.^{\circ} \quad \psi (\cotg \psi - n) > \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} - 1}.$$

Por consiguiente, en el caso que nos ocupa, á saber:

$$n \leq \frac{1}{\tan \psi},$$

habrá un solo máximo q_0 , ó dos q_0 y q_ψ , según se satisfaga ó no una de las condiciones

$$\psi (\cotg \psi - n) \geq \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} - 1}.$$

Los valores de q_0 y q_ψ son:

$$q_0 = p \rho \frac{E_1}{e} \left[n \psi + \frac{\rho h}{2r^2} \left\{ - (n \psi + 1) + (n \psi + 1) \cos \psi + \psi \sin \psi \right\} \right];$$

$$q_\psi = p \rho \frac{E_1}{e} (n \psi \cos \psi + \psi \sin \psi).$$

2.º caso:

$$n > \frac{1}{\tan \psi}.$$

Se ha demostrado que en este caso $X > 0$ desde $\alpha = 0$ hasta $\alpha_1 < \alpha_1$, y negativa para los valores siguientes hasta $\alpha = \psi$.

Es evidente en virtud de lo dicho en el caso anterior, que para los primeros valores de α , esto es, desde cero á α_1 , el máximo de q es q_0 . Pues aunque pudiera ocurrir que α' fuese menor que α_1 , y que en su consecuencia q fuera máximo para $\alpha = \alpha_1$, nuestra conclusión subsistiría puesto que pronto demostraremos que q toma un valor mayor que q_{α_1} en el intervalo limitado por $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \psi$.

En este intervalo X entra con signo — en la fórmula de q , que será entonces

$$(15) \quad q = p \rho \frac{E_1}{e} \left[n \psi \cos \alpha + \alpha \sin \alpha + \frac{\rho h}{2r^2} \left\{ (n \psi + 1) \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - (n \psi + 1) \cos \psi - \psi \sin \psi \right\} \right].$$

Los máximos y mínimos de q corresponden á las raíces de la ecuación

$$(16) \quad \frac{d q}{d \alpha} = p \rho \frac{E_1}{e} \left\{ \left(1 + \frac{\rho h}{2r^2} \right) \alpha \cos \alpha - \left[n \psi \left(1 + \frac{\rho h}{2r^2} \right) - 1 \right] \sin \alpha \right\} = 0;$$

de las cuales una es evidentemente $\alpha = 0$, que substituida en la segunda derivada

$$\frac{d^2 q}{d \alpha^2} = p \rho \frac{E_1}{e} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\rho h}{2r^2} \right) (2 - n \psi) - \frac{\rho h}{2r^2} \right] \cos \alpha - \left(1 + \frac{\rho h}{2r^2} \right) \alpha \sin \alpha \right\},$$

la convierte en

$$p \rho \frac{E_1}{e} \left[\left(1 + \frac{\rho h}{2r^2} \right) (2 - n \psi) - \frac{h \rho}{2r^2} \right];$$

cantidad siempre positiva en virtud de la relación

$$2 - n \psi > 1.$$

Luego el valor q de la expresión (15) es un mínimo para $\alpha = 0$.

De la ecuación (16) se deduce:

$$(17) \quad \frac{\alpha}{\tan \alpha} = n \psi - \frac{1}{1 + \frac{\rho h}{2r^2}},$$

que solo tiene una raíz α'' . Esta raíz hace, pues, un máximo á q .

Se comprende fácilmente la importancia que tiene para nosotros saber si α'' es mayor, igual ó menor que α_1 . Comparemos para ello la ecuación (17) con la (8), y veremos que α'' es mayor que α_1 ; y en su consecuencia con mucha más razón será mayor que α_2 .

Haciendo ahora

$$n \psi - \frac{\psi}{\tan \psi} = \delta,$$

se vé sin trabajo que

$$\alpha'' > \psi \text{ siempre que } \delta < \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} + 1}$$

$$\alpha'' = \psi \quad \text{»} \quad \delta = \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} + 1};$$

$$\alpha'' < \psi \quad \text{»} \quad \delta > \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} + 1}.$$

Cuando se verifique una de las dos primeras condiciones, los máximos serán los q_0 y q_ψ del caso anterior. Mas si se verifica la tercera, q_ψ será reemplazado por $q_{\alpha''}$.

Resumiendo, pues, nuestro trabajo, diremos:

«1.º Si ψ satisface la condición

$$\psi (n - \cotg \psi) > \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} + 1};$$

hay dos máximos dados respectivamente por las fórmulas

$$q_0 = p \rho \frac{E_1}{e} \left[n \psi + \frac{\rho h}{2r^2} \left\{ (n \psi + 1) (\cos \psi - 1) + \psi \sin \psi \right\} \right],$$

$$q_{\alpha''} = p \rho \frac{E_1}{e} \left[n \psi \cos \alpha'' + \alpha'' \sin \alpha'' + \frac{\rho h}{2r^2} \left\{ (n \psi + 1) \cos \alpha'' + \alpha'' \sin \alpha'' - (n \psi + 1) \cos \psi - \psi \sin \psi \right\} \right],$$

siendo α'' la raíz mayor que cero de la ecuación

$$\alpha \cotg \alpha = n \psi - \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} + 1}.$$

2.º «Si ψ no verifica la mencionada condición, los dos máximos serán el mismo q_0 y q_ψ ; exceptuándose, sin embargo, aquellos casos en que ψ , á más de no satisfacer la referida condición, realiza una de las dos que siguen:

$$\psi (\cotg \psi - n) \geq \frac{1}{\frac{\rho h}{2r^2} - 1};$$

casos en que solo habrá un máximo, y ese será q_0 .

$$q_\psi = p \rho \frac{E_1}{e} (n \psi \cos \psi + \psi \sin \psi).$$

Siempre que sean dos los máximos, el absoluto será evidentemente el mayor de ellos.

Con la satisfaccion de haber complacido al Sr. X, continuamos el exámen de su artículo, si bien ya nos detendremos en el muy poco por haberse alargado demasiado el nuestro. Habla dicho señor, y por cierto que habla bien: «No se presta, pues, á ser reducida á tablas análogas á las V de la obra de Bresse.»

»Para discutir esta fórmula no hay más remedio que proceder en cada caso particular á la verificación numérica, etc.»

¿Conque no se presta á ser reducida á tablas? Parece que con lo que llevamos dicho tendrá bastante el Sr. X para convencerse de lo contrario. Aunque, por otra parte, ¿quién ha contado al Sr. X que sin las fórmulas de los máximos no pueden calcularse las tablas? Si hubiera preguntado á cualquier estudiante de Algebra, ó mejor todavía, de Analítica, este le habria dicho: que dada una ecuacion de la forma

$$y = \varphi(x),$$

se puede construir por puntos la curva que representa dando valores á x y calculando los correspondientes de y , etc., etc.

Para que los lectores vean hasta qué punto llega la candidez del Sr. X, copiamos el último párrafo de su artículo, siquiera por aquello de que á lo último se echa siempre el resto. Dice así: «Estas ligeras indicaciones se prestan á explicarse solo con un ejemplo, cuyo desarrollo nos haria traspasar los límites que nos hemos señalado.»

Pedimos mil perdones al articulista de la *Gaceta* por haber subrayado estas tres palabras de su párrafo.

Para fijar las ideas, nos permitimos comparar las principales noticias y proposiciones del artículo del Sr. X con los teoremas demostrados en el nuestro.

En aquel se dice:

- 1.º Hemos llenado un vacío en la obra de Bresse.
- 2.º Es imposible hallar los máximos y mínimos de q .
- 3.º No pueden reducirse á tablas las fórmulas. En el nuestro se demuestra:
- 1.º Que no ha llenado tal vacío el Sr. X.
- 2.º Que pueden hallarse los máximos y mínimos de q .
- 3.º Que son reducibles á tablas las fórmulas.

Ya estamos en disposicion de explicar la comparacion que ántes hicimos entre las ideas del Sr. X y las mónadas de Leibnitz.

Figúrense nuestros lectores las mónadas de este eminente filósofo colocadas en la base de un cono; y en su vértice la Mónada suprema, la infinitamente sabia, la infinitamente inteligente, que desde este punto las vé á todas, y á todas hace sentir el poderoso influjo de su sabiduria. Fácilmente comprenderán entonces que la razon de ser de nuestra comparacion es la creencia de que el Sr. X tiene tambien sus ideas en un cono, en cuyo vértice se sienta, influyendo poderosamente en todas ellas, no la infinita Sabiduria, ni la infinita Inteligencia, sino la infinita inocencia en estas materias.

Por eso le vemos tratarlas *inocentemente*; aunque con la *inocente* pretension de saberlo todo, de proclamarse el Juan Pico del siglo XIX.

Conociendo, pues, su inocencia, y que es materia dispuesta para todo, nos atrevemos á aconsejarle complete su caudal de conocimientos con un baño de Filosofía. Le recomendamos para ello la escuela más notable de la Grecia; pues todo el mundo sabe que, mientras mejor es la escuela, más se puede aprender. La escuela á que nos referimos es la de los jardines de Academio, la del célebre Platon, en la que estudiará especialmente dos cosas: 1.ª la inscripcion, que su Maestro colocó sobre la puerta para evi-

tar que le importunasen aquellos que no podian entender las materias que allí trataban, y que decia así: «No entre aquí el que ignore la Geometría»; 2.ª El principio de su Filosofía «Conócete á ti mismo»: palabras tan notables, que sirvieron tambien de base á la Filosofía moral de Sócrates; de máxima á uno de los siete sábios de Grecia, Quilon de Esparta; y de inscripcion al templo de Delfos.

No dudamos que el Sr. X nos hará la honra de seguir nuestro consejo, y esperamos saque mucho partido para lo sucesivo de la escuela de Platon.

A. HERRERA BONILLA.

PARTE OFICIAL.

14 de Noviembre. Decreto disponiendo que toda obra de las comprendidas bajo la denominacion de públicas, que se ejecute por los particulares, y para la cual no soliciten estos prévia declaracion de utilidad, podrá ser proyectada, construida y explotada sin intervencion de los agentes administrativos; quedando el dueño libre de fijar las tarifas, peajes, derechos, y en general los precios que juzgue convenientes por el uso de dicha obra, sujetándose el concesionario á las demás disposiciones contenidas en las bases generales á que la nueva legislacion de Obras públicas se refiere.

Idem. Disponiendo que la carretera de Torreperogil á Huéscar, por Cazorla, comprendida en el plan general vigente, sea reemplazada con otra que se denominará de Torreperogil á Huéscar, por Quesada y Castril, considerando adicionado dicho plan con una nueva carretera denominada de Peal del Becerro á Cazorla, considerando ambas clasificadas como de tercer orden.

Idem. Clasificando de tercer orden la carretera de Casas de D. Antonio á Montanchez, disponiendo que la misma, en vez de empalmar con la de San Juan del Puerto á Cáceres, en Casas de D. Antonio, lo verifique en el puerto denominado Puerto de las Herrerías.

13 de Noviembre. Declarando de utilidad pública las obras de que son concesionarios en el Puerto de Pasajes los Sres. Ruiz de Velasco y Compañía.

Idem. Orden declarando caducada la concesion que les fue otorgada á D. Guillermo Partington y D. Jorge Higgin para construir un canal de riego derivado del rio Jarama, relevando á dichos concesionarios de la pérdida del depósito de 52.000 rs. que constituyeron en 29 de Julio de 1864.

SUBASTAS.

2 de Enero. De las obras que faltan en la carretera de Torredonjimeno al-Carpio, seccion del Pilar de Moya al limite de la provincia de Córdoba. Presupuesto 236.297 escudos 693 milésimas.

Idem. De las obras de 23 casillas de peones camineros para las carreteras de la provincia de Soria.