

MADRID 1.º DE JULIO DE 1868.

TOMO XVI.

NÚM. 13.

FUNCIONES ELÍPTICAS.

(Conclusion.)

FUNCIONES ELÍPTICAS DE SEGUNDA ESPECIE.

11. Limitaremos el estudio de las funciones elípticas de segunda y tercera especie á la demostracion de los teoremas que sirven de base á su teoría. El fundamental de las de segunda especie consiste en que *las funciones* $E(c, \varphi)$, $E(c, \psi)$ y $E(c, \mu)$, *cuyas amplitudes* φ , ψ y μ *satisfacen á la condicion* (10) *del núm. 4, están ligadas por la igualdad*

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) = E(c, \mu) + c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu.$$

Para demostrarlo, pongamos la ecuacion (10) del núm. 4, bajo la forma

$$(\cos \mu - \cos \varphi \cos \psi)^2 = \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu);$$

desarrollando y poniendo en vez de $\operatorname{sen}^2 \varphi$ y $\operatorname{sen}^2 \psi$, $1 - \cos^2 \varphi$ y $1 - \cos^2 \psi$, se halla:

$$\begin{aligned} \cos^2 \mu + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \mu = \\ 1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu + \\ c^2 \operatorname{sen}^2 \mu \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \mu \cos^2 \psi - \\ c^2 \operatorname{sen}^2 \mu \cos^2 \varphi \cos^2 \psi, \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \cos^2 \mu - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \mu = 1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi \\ - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu [1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi + \\ (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 - \operatorname{sen}^2 \psi)], \end{aligned}$$

que se reduce á

$$\begin{aligned} \cos^2 \mu + \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \mu + \\ c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \mu = 1. \end{aligned}$$

Diferenciamos ahora la expresion anterior, considerando á μ como constante y á φ y á ψ como variables, se tendrá:

$$\begin{aligned} + d\varphi (-2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \cos \mu + 2 c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \varphi) \\ + d\psi (-2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi + 2 \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \cos \mu + 2 c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \psi) \} = 0, \text{ que} \end{aligned}$$

puede ponerse bajo la forma siguiente:

$$\begin{aligned} - d\varphi [2 \operatorname{sen} \varphi (\cos \varphi - \cos \psi \cos \mu) - 2 c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \varphi] \\ - d\psi [2 \operatorname{sen} \psi (\cos \psi - \cos \varphi \cos \mu) - 2 c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \psi] \} = 0. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (11) y (12) del núm. 4, se deduce que

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \psi \cos \mu = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu \Delta \varphi \\ \cos \psi - \cos \varphi \cos \mu = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \mu \Delta \psi, \end{aligned}$$

con lo cual se convierte la igualdad precedente en esta otra:

$$\begin{aligned} d\varphi (2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu \Delta \varphi - 2 c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \varphi) \\ + d\psi (2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu \Delta \psi - 2 c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen}^2 \mu \cos \psi) \} = 0; \end{aligned}$$

y dividiendo ambos miembros por $2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu$, en

$$d\varphi (\Delta \varphi - c^2 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu \cos \varphi) + d\psi (\Delta \psi - c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \mu \cos \psi) = 0,$$

ó

$$\Delta \varphi d\varphi + \Delta \psi d\psi = c^2 \operatorname{sen} \mu d(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi).$$

Integrando la ecuacion anterior, se obtiene:

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) = C + c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu.$$

Para determinar la constante, haremos $\varphi = 0$, en cuyo caso $\psi = \mu$ y $E(c, 0) = 0$, deduciéndose, por lo tanto, $C = E(c, \mu)$ y

$$E(c, \varphi) + E(c, \psi) = E(c, \mu) + c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \mu;$$

que demuestra el teorema enunciado.

12. Vemos que la relacion que liga á $E(c, \varphi)$, $E(c, \psi)$ y $E(c, \mu)$ no es tan sencilla como la que se verifica entre $F(c, \varphi)$, $F(c, \psi)$ y $F(c, \mu)$, lo que justifica que éstas se consideren como de primera especie, á pesar de la sencillísima representacion geométrica que aquellas tienen.

FUNCIONES ELÍPTICAS DE TERCERA ESPECIE.

13. Antes de demostrar el teorema fundamental de las funciones elípticas de tercera especie,

tenemos que determinar una fórmula en que habremos de apoyarnos. En el núm. 14 se ha obtenido la ecuación

$$\Delta \varphi d\varphi + \Delta \psi d\psi = c^2 \operatorname{sen} \mu d(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi), \quad (24)$$

pero $\Delta \varphi d\varphi + \Delta \psi d\psi = \frac{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi}{\Delta \varphi} + \frac{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \psi) d\psi}{\Delta \psi},$

y como (núm. 5)

$$\frac{d\varphi}{\Delta \varphi} + \frac{d\psi}{\Delta \psi} = 0, \text{ se tiene}$$

$$\Delta \varphi d\varphi + \Delta \psi d\psi = \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1 + c^2 \operatorname{sen}^2 \psi) = c^2 \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi);$$

luego, en virtud de la ecuación (24), se tendrá:

$$\operatorname{sen} \mu d(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) = \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi). \quad (25)$$

14. Esto supuesto, para deducir la fórmula en que está basada la teoría de las funciones de tercera especie, observaremos que

$$d\Pi(c, a, \varphi) + d\Pi(c, a, \psi) = \frac{d\varphi}{(1 + a \operatorname{sen}^2 \varphi) \Delta \varphi} + \frac{d\psi}{(1 + a \operatorname{sen}^2 \psi) \Delta \psi} = \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} \left(\frac{1}{1 + a \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{1}{1 + a \operatorname{sen}^2 \psi} \right),$$

ó bien

$$d\Pi(c, a, \varphi) + d\Pi(c, a, \psi) = a \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} \frac{\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1 + a \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 + a \operatorname{sen}^2 \psi)},$$

expresión que, en virtud de la ecuación (25), se convierte en la que sigue:

$$d\Pi(c, a, \Pi) + d\Pi(c, a, \Pi) = a \operatorname{sen} \mu \frac{d(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi)}{(1 + a \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 + a \operatorname{sen}^2 \psi)}. \quad (26)$$

Haciendo $\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi = \alpha$, $\operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \psi = \epsilon$, el segundo miembro de la ecuación anterior se reduce á

$$a \operatorname{sen} \mu \frac{d\alpha}{1 + a\epsilon + a^2 \alpha^2}. \quad (27)$$

Para eliminar ϵ observaremos que de la ecuación (10) del núm. 4 se saca

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \psi = \cos^2 \mu + 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \cos \mu \Delta \mu + \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu),$$

y como

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \psi = (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 - \operatorname{sen}^2 \psi) = 1 - (\operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \psi) + \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi = 1 - \epsilon + \alpha^2,$$

se tendrá

$$1 - \epsilon + \alpha^2 = \cos^2 \mu + 2 \alpha \cos \mu \Delta \mu + \alpha^2 (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu)$$

ó

$$\epsilon = \operatorname{sen}^2 \mu - 2 \alpha \cos \mu \Delta \mu + \alpha^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \mu;$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d\alpha}{1 + a\epsilon + a^2 \alpha^2} = \frac{d\alpha}{(1 + a \operatorname{sen}^2 \mu) - 2 \alpha \cos \mu \Delta \mu + (a^2 + a c^2 \operatorname{sen}^2 \mu) \alpha^2}.$$

Haciendo, para mayor sencillez, $1 + a \operatorname{sen}^2 \mu = p$, $a \cos \mu \Delta \mu = q$ y $a^2 + a c^2 \operatorname{sen}^2 \mu = r$, se obtiene:

$$\frac{d\alpha}{1 + a\epsilon + a^2 \alpha^2} = \frac{d\alpha}{p - 2q\alpha + r\alpha^2}.$$

Si ahora representamos por $\lambda(x)$ la integral

$$\int_0^x \frac{d\alpha}{p - 2q\alpha + r\alpha^2},$$

que siempre puede obtenerse en términos finitos, tendremos, en virtud de las expresiones (26) y (27),

$$\Pi(c, a, \varphi) + \Pi(c, a, \psi) = C + a \operatorname{sen} \mu \lambda(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi).$$

Para hallar el valor de C , bastará recordar que para $\varphi = 0$, $\psi = \mu$ y $\Pi(c, a, 0) = 0$, y observar que $\alpha = 0$ y $\lambda(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) = 0$. Claro es, de consiguiente, que $C = \Pi(c, a, \mu)$ y la ecuación anterior vendrá á ser

$$\Pi(c, a, \varphi) + \Pi(c, a, \psi) = \Pi(c, a, \mu) + a \operatorname{sen} \mu \lambda(\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi).$$

Esta fórmula es la fundamental de las funciones elípticas de la última especie.

M. PARDO.