

## FUNCIONES ELÍPTICAS.

La dificultad de que los alumnos de la Escuela de Caminos puedan estudiar las nociones de *Funciones elípticas*, incluidas en el programa de la clase de Cálculo, en ninguna de las obras escritas sobre este asunto, nos ha movido á redactar el presente artículo, en que solo se comprenden los fundamentos de teoría tan importante.

### GENERALIDADES.

1. Se sabe que una diferencial cualquiera,  $F(x) dx$ , tiene siempre una integral, pero que ordinariamente no puede expresarse ésta en términos finitos, en cuyo caso la funcion de  $x$

representada por  $\int_a^x F(x) dx$ , es una verdadera *trascendente*, toda vez que solo puede calcularse aproximadamente para un valor determinado de la variable. Esto sucede, por

ejemplo, con  $\int_1^x \frac{dx}{x}$ , expresion trascendente que se ha convenido en representar por  $\ln x$ , y cuyos diferentes valores aproximados están dados por tablas construidas *ad hoc*.

En el mismo caso se encuentran las integrales definidas

que se denominan *funciones elípticas* y que Legendre propuso representar respectivamente por las notaciones

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+a \sin^2 \varphi) \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}},$$

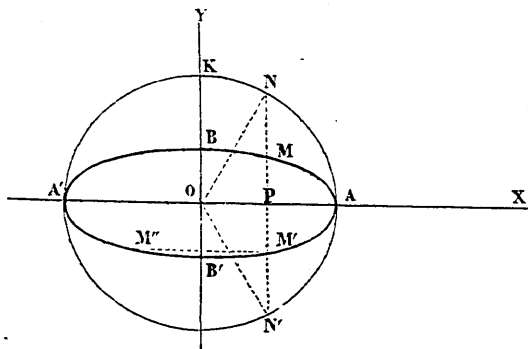
que se denominan *funciones elípticas* y que Legendre propuso representar respectivamente por las notaciones

$$F(c, \varphi), \quad E(c, \varphi) \text{ y } \Pi(c, a, \varphi).$$

En todo lo que sigue convendremos en llamar *amplitud* á la variable independiente  $\varphi$ ; *módulo* á la constante  $c$  que entra en las tres funciones; y *parámetro* á la  $a$ , únicamente contenida en la última. Para distinguir unas funciones de otras en el lenguaje ordinario, llamaremos respectivamente de *primera*, *segunda* y *tercera especie* á las tres funciones  $F$ ,  $E$  y  $\Pi$ .

2. Antes de pasar adelante conviene que

justifiquemos el nombre de *elípticas*, dado á las trascendentes que nos ocupan. Sea una elipse, fig. 1.ª, cuyo semieje mayor es  $OA = a$ ,



y el semieje menor  $OB = b$ ; es claro que su ecuacion referida á los ejes  $Ox$  y  $Oy$ , será:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Tratemos de determinar la longitud  $s$  de un arco cualquiera,  $BM$ , contado desde el extremo,  $B$ , del eje menor, tendremos:

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$\int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} =$$

$$\int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^2 b^2 (a^2 - x^2)}} =$$

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}.$$

Representando, para mayor sencillez, la excentricidad de la elipse,  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ , por  $c$ , y haciendo  $x = a \sin \varphi$ , lo que es permitido, puesto que  $x$  varia entre  $+a$  y  $-a$ , se tendrá:

$$s = \int_0^{\varphi} a \cos \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1 - c^2 \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} =$$

$$a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

lo que demuestra que la longitud buscada es

proporcional á  $\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} = E(c, \varphi)$

en que  $c$  representa la excentricidad, y  $\varphi$  está determinada por la relación  $\sin \varphi = \frac{x}{a}$ . Es evidente, pues, que para construir el ángulo  $\varphi$  correspondiente al arco  $BM$ , bastará trazar la semicircunferencia  $A'KA$ , levantar la ordenada  $NMP$  y unir  $O$  con  $N$ ; el ángulo  $NOK$  será el buscado, puesto que

$$\sin NOK = \sin ONP = \frac{OP}{ON} = \frac{OP}{OA} = \frac{x}{a}.$$

La relación notable que se acaba de demostrar que existe entre las funciones de segunda especie y la longitud de los arcos de elipse, explica el nombre de *elípticas* que reciben las tres trascendentes (núm. 1).

5. La amplitud  $\varphi$  puede tomar todos los valores comprendidos entre  $+\infty$  y  $-\infty$ , pero se puede demostrar fácilmente que conocidos los valores de las funciones elípticas para todas las amplitudes comprendidas entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$  quedan determinados los demás.

Para demostrarlo, observaremos ante todo que si en una cualquiera de las funciones elípticas, en la de primera especie por ejemplo, se cambia el signo de la amplitud  $\varphi$ , cambiará también el signo de la función sin alterarse ésta numéricamente. En efecto, comparando las dos integrales

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \int_0^{-\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}},$$

se advierte á primera vista que los elementos en que ambas pueden descomponerse, solo difieren en el signo, de suerte que  $F(c, \varphi) = -F(c, -\varphi)$ , y lo mismo se demostraría que  $E(c, \varphi) = -E(c, -\varphi)$  y  $\Pi(c, a, \varphi) = -\Pi(c, a, -\varphi)$ . Queda pues sentado que, conociendo los valores de las funciones elípticas para amplitudes positivas, se determinan los que corresponden á amplitudes negativas.

Falta probar que todos los valores de las funciones elípticas para amplitudes positivas se conocen inmediatamente, suponiendo previamente determinados aquellos para amplitudes comprendidas entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ . Empezaremos

por demostrar geoméricamente el teorema para las funciones de segunda especie, y advertiremos, para simplificar lo que sigue, que cuando el límite superior de las integrales que representan las funciones elípticas, es igual á  $\frac{\pi}{2}$ , se dice que las funciones son *completas* y se expresan abreviadamente por las notaciones  $F(c)$ ,  $E(c)$  y  $\Pi(c, a)$ , de suerte que:

$$F(c) = F\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$E(c) = E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi};$$

$$\Pi(c, a) = \Pi\left(c, a, \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+a \sin^2 \varphi) \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Esto supuesto, sea una elipse, fig. 1.ª, cuyo semieje menor sea  $OB$ , y admitamos que se trate de la longitud del arco  $BA M'$  que corresponde á la amplitud  $\varphi = KO N'$ ; vamos á probar que dicha longitud puede deducirse en función de longitudes de arcos menores que  $BMA$ . Esto es bien claro, toda vez que

$$BAM' = BAB' - B'M' = 2BMA - BM,$$

ó lo que es lo mismo, llamando  $\alpha$  al ángulo  $NOA$ ,

$$E\left(c, \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2E(c) - E\left(c, \frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

lo que demuestra que, conociendo los valores de la función  $E$  para amplitudes comprendidas entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ , quedan determinados los que corresponden á amplitudes comprendidas entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ .

Si se tratara de un arco correspondiente á una amplitud comprendida en  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ , porejemplo, del arco  $BA B' M''$ , se tendría:

$$BAB' M'' = BAB' + B'M'' = 2BA + BM,$$

$$\text{ó bien } E\left[c, \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = 2E(c) +$$

$$E\left(c, \frac{\pi}{2} - \alpha\right), \text{ fórmula que se convierte en la}$$

que sigue, cambiando  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , en  $\alpha$ :

$$E(c, \pi + \alpha) = 2E(c) + E(c, \alpha).$$

Así se continuaria si se tratase de amplitudes mayores.

Las funciones de primera y de tercera especie no se prestan á representación gráfica inmediata, siendo necesario recurrir, para demostrar respecto á ellas el mismo teorema, á consideraciones analíticas. Sea  $A$  el coeficiente de  $d\varphi$  bajo el signo integral, en cualquiera de las funciones elípticas, por manera que

$\int_0^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi$  sea una de aquellas, y representemos por  $\alpha$  una amplitud comprendida entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ , tendremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi \quad (1);$$

pero es fácil ver que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A d\varphi$

y que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} A d\varphi$ , obser-

vando que, en virtud de la naturaleza de la función  $A$ , los elementos que componen los segundos miembros son exactamente iguales á los de los primeros, con la sola diferencia de que se presentan en un orden inverso. La igualdad (1) puede, pues, trasformarse en la siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} A d\varphi \quad (2),$$

fórmula que permite determinar los valores de las funciones elípticas de cualquiera especie para amplitudes comprendidas entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ , cuando se conocen los valores que corresponden á amplitudes variables entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ . Si se tratase de amplitudes comprendidas entre  $\frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$ , cambiaríamos en la fórmula (2),  $\alpha$  en  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ , y se obtendría

$$\int_0^{\pi + \alpha} A d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi - \int_0^{-\alpha} A d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi + \int_0^{\alpha} A d\varphi \quad (3);$$

haciendo igual cambio en esta expresión, se llega á la siguiente:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2} + \alpha} A d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2} + \alpha} A d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} A d\varphi \quad (4);$$

del mismo modo se hallaría

$$\int_0^{2\pi + \alpha} A d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} A d\varphi + \int_0^{\alpha} A d\varphi,$$

y así se continuaria sucesivamente.

Las fórmulas (2), (3) y (4), pueden escribirse del modo siguiente, aplicándolas, por ejemplo, á las funciones de 1.<sup>a</sup> especie:

$$F\left(c, \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2 F(c) - F\left(c, \frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$F\left(c, \pi + \alpha\right) = 2 F(c) + F\left(c, \alpha\right),$$

$$F\left(c, \frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 4 F(c) - F\left(c, \frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$F\left(c, 2\pi + \alpha\right) = 4 F(c) + F\left(c, \alpha\right),$$

expresiones que completan la demostración del teorema enunciado al principio de este número.

## FUNCIONES ELÍPTICAS DE PRIMERA ESPECIE.

### FUNCIONES DIRECTAS.

4. El teorema que sirve de fundamento para el estudio de las funciones elípticas directas de primera especie, y el único que daremos á conocer, consiste en que *las funciones*  $F(c, \varphi)$ ,  $F(c, \psi)$  y  $F(c, \mu)$ , *cuyas amplitudes,  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\mu$  satisfacen á la condición*

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu} \quad (5)$$

*están ligados por la igualdad*

$$F(c, \mu) = F(c, \varphi) + F(c, \psi).$$

Antes de demostrarlo, observaremos que la relación (5) no es otra cosa más que la fórmula fundamental de trigonometría esférica, aplicada á un triángulo cuyos tres lados fuesen  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\mu$ , y en el cual el ángulo  $C$ , opuesto á  $\mu$ , estuviese dado por la ecuación

$$\operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} \mu \text{ ó } \cos C = -\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \mu}.$$

De aquí se deduce que, si llamamos  $A$  y  $B$  á los ángulos opuestos respectivamente á  $\varphi$  y  $\psi$ , habrá de tenerse  $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \mu} = c$ , ó

lo que es lo mismo,

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}, \quad \cos B = \pm \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi},$$

y por lo tanto habrán de verificarse las ecuaciones siguientes:

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \mu \pm \sin \psi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \dots (6)$$

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \mu \pm \sin \varphi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} \dots (7)$$

Las amplitudes  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\mu$  podemos suponer que varían tan solo entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ , toda vez que una función elíptica cualquiera podemos reducirla a otra cuya amplitud satisfaga a esta condición; y en esta hipótesis se ve con facilidad que los radicales de las fórmulas (6) y (7) deben tomarse con signo positivo. Efectivamente, siendo  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\mu$  menores que un recto, todas las líneas trigonométricas que entran en las expresiones (5), (6) y (7) serán positivas, deduciéndose de la primera que

$$\cos \mu < \cos \varphi \cos \psi \quad (8).$$

Ahora bien, si en el radical de la fórmula (6) se tomara el signo — resultaría que

$$\cos \varphi < \cos \psi \cos \mu \quad (9),$$

y multiplicando ahora las desigualdades (8) y (9) se llegaría a

$\cos \varphi \cos \mu < \cos \varphi \cos \mu \cos^2 \psi$  ó  $1 < \cos^2 \psi$ , resultado absurdo. Lo mismo se probaría que en la expresión (7) debe adoptarse el signo positivo; las magnitudes  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\mu$  estarán, pues ligadas por las siguientes ecuaciones:

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \mu} \quad (10)$$

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \mu + \sin \psi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \quad (11)$$

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \mu + \sin \varphi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} \quad (12)$$

5. Sentado lo que precede, pasemos a la demostración del teorema fundamental.

De la ecuación (10) se deduce.

$$\frac{\cos \mu}{\sin \varphi \sin \psi} = \cot \varphi \cot \psi - \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \mu},$$

expresión que diferenciada, considerando a  $\mu$  como constante y a  $\varphi$  y  $\psi$  como variables, da:

$$-\frac{\cos \mu}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi} (\sin \psi \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \cos \psi d\psi) =$$

$$-\frac{\cot \psi d\varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{\cot \varphi d\psi}{\sin^2 \psi}, \quad \text{ó bien}$$

$$-\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi} (\sin \psi \cos \varphi \cos \mu - \sin \psi \cos \psi)$$

$$-\frac{d\psi}{\sin^2 \varphi \sin^2 \psi} (\sin \varphi \cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \cos \varphi) = 0,$$

que se reduce a

$$\sin \psi d\varphi (\cos \psi - \cos \varphi \cos \mu) + \sin \varphi d\psi (\cos \varphi - \cos \psi \cos \mu) = 0. \quad (13)$$

Pero, en virtud de las ecuaciones (11) y (12) se tiene:

$$\cos \varphi - \cos \psi \cos \mu = \sin \psi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\cos \psi - \cos \varphi \cos \mu = \sin \varphi \sin \mu \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi},$$

expresiones que sustituidas en la (13) dan lugar a la siguiente ecuación:

$$\sin \varphi \sin \psi \sin \mu d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} +$$

$$\sin \varphi \sin \psi \sin \mu d\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} = 0,$$

ó bien,

$$d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} + d\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} = 0,$$

que puede ponerse bajo la forma

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = 0.$$

Integrando esta ecuación diferencial, en la que las variables están separadas, se deduce:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = C,$$

$$\text{ó} \quad F(c, \varphi) + F(c, \psi) = C \quad (14).$$

Para determinar la constante, hagamos en esta ecuación  $\psi = 0$ , en cuyo caso  $\varphi = \mu$ , en virtud de la igualdad (10); resultará

$$F(c, \mu) + F(c, 0) = C,$$

de donde se desprende que  $C = F(c, \mu)$ , atendiendo a que  $F(c, 0) = 0$ .

La ecuación (14) se convierte, por consiguiente, en

$$F(c, \varphi) + F(c, \psi) = F(c, \mu),$$

que demuestra el teorema enunciado.

#### FUNCIONES INVERSAS.

6. Vamos a dar a conocer algunas propiedades notables de las funciones elípticas inversas de primera especie; pero antes es preciso deducir una fórmula en que habremos de apoyarnos.

En las expresiones (10), (11) y (12) del número 4, hagamos, para mayor sencillez,

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \mu} = \Delta \mu, \quad \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} = \Delta \varphi \text{ y}$$

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} = \Delta \psi,$$

con lo cual se convertirán en:

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \Delta \mu \quad (15)$$

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \mu + \sin \psi \sin \mu \Delta \varphi \quad (16)$$

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \mu + \sin \varphi \sin \mu \Delta \psi \quad (17)$$

Multiplicando por  $\cos \varphi$  los dos miembros de la ecuación (16), por  $\cos \psi$  los dos de la (17), y restando los resultados, se obtiene:

$$\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi = \sin \psi \sin \mu \cos \varphi \Delta \varphi - \sin \varphi \sin \mu \cos \psi \Delta \psi,$$

de donde

$$\sin \mu = \frac{\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi}{\sin \psi \cos \varphi \Delta \varphi - \sin \varphi \cos \psi \Delta \psi},$$

valor que puede sufrir las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \mu &= \frac{(\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) (\operatorname{sen} \psi \cos \varphi \Delta \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \Delta \psi)}{\operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \varphi (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) - \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \psi (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \psi)} \\ &= \frac{(\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) (\operatorname{sen} \psi \cos \varphi \Delta \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \Delta \psi)}{\operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \varphi - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \psi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \psi} \\ \operatorname{sen} \mu &= \frac{(\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) (\operatorname{sen} \psi \cos \varphi \Delta \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \Delta \psi)}{\cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \psi) - \cos^2 \psi (1 - \cos^2 \varphi) - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi (\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi)} \\ &= \frac{(\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) (\operatorname{sen} \psi \cos \varphi \Delta \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \Delta \psi)}{(\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi)}, \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\operatorname{sen} \mu = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \psi \Delta \psi + \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \Delta \varphi}{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi} \quad (18).$$

### 7. Si hacemos

$$u = F(c, \varphi),$$

se dirá que  $u$  es la funcion elíptica correspondiente á la amplitud  $\varphi$ , y para obtener la funcion inversa bastaría, si se conociese la forma de  $F$ , en términos finitos, deducir  $\varphi$  en funcion de  $u$ . Como esto no es posible, se ha convenido en representar dicha inversa por

$$\varphi = \operatorname{am} u,$$

en la cual las letras *am.* son las iniciales de *amplitud*, y la variable independiente es la  $u$ , esto es, la funcion elíptica.

Haciendo análogamente

$$v = F(c, \psi) \text{ y } w = F(c, \mu),$$

se tendrá:

$$\psi = \operatorname{am} v \text{ y } \mu = \operatorname{am} w;$$

pero como, en virtud del teorema fundamental de las funciones de primera especie, se tiene que  $w = u + v$ , resultará que

$$\mu = \operatorname{am} (u + v).$$

Sustituyendo en la fórmula (18) del núm. 6 en vez de  $\varphi, \psi$  y  $\mu$ , sus equivalentes, se tendrá

$$\operatorname{sen} \operatorname{am} (u + v) = \frac{\operatorname{sen} \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v + \operatorname{sen} \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sen}^2 \operatorname{am} v} \quad (19).$$

Cuando el módulo  $c$  se reduce á 0, la fórmula anterior se convierte, teniendo en cuenta que en este caso

$$\operatorname{am} u = u, \operatorname{am} v = v, \operatorname{am} (u + v) = u + v; \Delta \operatorname{am} u = \Delta \operatorname{am} v = \Delta \operatorname{am} (u + v) = 1,$$

en la siguiente, que es bien conocida,

$$\operatorname{sen} (u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v.$$

Si en la fórmula (19) cambiamos el signo de  $v$  y observamos que cuando una funcion elíptica varía de signo, varía también el de la amplitud, se llegará al resultado siguiente:

$$\operatorname{sen} \operatorname{am} (u - v) = \frac{\operatorname{sen} \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v - \operatorname{sen} \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sen}^2 \operatorname{am} v},$$

de cuya fórmula se obtiene, como en el caso anterior, la correspondiente en la trigonometría, es decir,

$$\operatorname{sen} (u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v.$$

Análogamente pudieran haberse deducido las expresiones de

$$\cos \operatorname{am} (u \pm v), \operatorname{tang} \operatorname{am} (u \pm v), \text{ etc.,}$$

y siempre hubiéramos venido á parar á la misma notable consecuencia de que las fórmulas que se emplean para la transformación de las funciones trigonométricas no son más que casos particulares de las relativas á la transformación de las funciones elípticas inversas de primera especie.

8. Una cosa semejante podemos decir acerca de las principales propiedades de las funciones trigonométricas. La funcion  $\operatorname{sen} u$ , por

ejemplo, es periódica para valores reales de  $u$ , pero en el momento en que se cambia  $u$  en  $u\sqrt{-1}$  es sabido que  $\operatorname{sen} u\sqrt{-1}$  se convierte en una exponencial puesto que

$$\operatorname{sen} u\sqrt{-1} = \frac{e^{-u} - e^u}{2\sqrt{-1}}, \text{ que deja de ser pe-}$$

riódica para valores reales de la variable. La funcion exponencial  $e^u$  es, por el contrario, periódica para valores imaginarios, toda vez que

$$e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1} \operatorname{sen} u, \text{ y deja de serlo para valores reales. Pues bien, la funcion } \operatorname{sen} \operatorname{am} u \text{ y todas las análogas satisfacen á la}$$

condicion de periodicidad, tanto para una serie de valores reales como imaginarios de  $u$ .

Probémoslo primero para valores reales.

Designemos por  $\frac{\omega}{2}$  la funcion completa  $F(c)$ : en virtud de las fórmulas deducidas al final del número 3, podremos poner, haciendo, en general,  $F(c, \alpha) = u$ :

$$F(c, \alpha) = u$$

$$F(c, 2\pi + \alpha) = 4F(c) + F(c, \alpha) = u + 2\omega$$

$$F(c, 4\pi + \alpha) = 8F(c) + F(c, \alpha) = u + 4\omega$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F(c, 2k\pi + \alpha) = 4kF(c) + F(c, \alpha) = u + 2k\omega;$$

pasando á las funciones inversas, se obtiene:

$$\alpha = \text{am } u.$$

$$2\pi + \alpha = \text{am } (u + 2\omega)$$

$$4\pi + \alpha = \text{am } (u + 4\omega)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$2k\pi + \alpha = \text{am } (u + 2k\omega),$$

y como los senos de los primeros miembros son iguales, lo serán tambien los de los segundos, deduciéndose, por lo tanto:

$$\text{sen am } u = \text{sen am } (u + 2\omega) = \text{sen am } (u + 4\omega) = \dots$$

$$\dots = \text{sen am } (u + 2k\omega),$$

fórmula que demuestra que la funcion  $\text{sen am } \omega$  recibe valores idénticos para valores de  $u$  que difieran en  $2k\omega$ , siendo  $k$  un número entero cualquiera.

Pasemos á demostrar el teorema en el segundo caso, esto es, cuando  $u$  recibe valores imaginarios.

Cambiemos de variables en la expresion diferencial  $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\text{sen}^2\varphi}}$ , haciendo

$$\text{sen } \varphi = \sqrt{1-c^2} \text{ tang } \theta \quad (20)$$

$$c^2 = 1 - c'^2 \quad (21),$$

observando que esto último siempre es posible, porque, representando el módulo la excentricidad de una elipse (núm. 2) será constantemente menor que la unidad. De la ecuacion (20) se deduce

$$d\varphi = \sqrt{1-c^2} \frac{d\theta}{\cos \varphi \cos^2 \theta},$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 + \text{tang}^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta},$$

y, por consiguiente,

$$d\varphi = \sqrt{1-c^2} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Sustituyendo los valores de  $d\varphi$ ,  $c^2$  y  $\text{sen } \varphi$  en la expresion diferencial de las funciones elípticas de 1.ª especie, se obtiene:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\text{sen}^2\varphi}} = \sqrt{1-c^2} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{1+(1-c^2)\text{tg}^2\theta}} = \sqrt{1-c^2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2\text{sen}^2\theta}}.$$

é integrando,

$$F(c, \varphi) = \sqrt{1-c^2} F(c', \theta) + C;$$

y como la constante es nula, porque para  $\varphi = 0$  se tiene  $\theta = 0$ , por la ecuacion (20), y además  $F(c, 0) = 0$ , resulta:

$$F(c, \varphi) = \sqrt{1-c^2} F(c', \theta),$$

$$F(c, \varphi) = u \sqrt{1-c^2}$$

haciendo  $F(c', \theta) = u$ .

Pasando á la funcion inversa, y poniendo dentro de un paréntesis el módulo á continuacion del signo *am* para diferenciar las amplitudes que corresponden á diversos módulos, se tendrá:

$$\varphi = \text{am } (u \sqrt{1-c^2}, c),$$

y tomando los senos de ambos miembros:

$$\text{sen } \varphi = \text{sen am } (u \sqrt{1-c^2}, c),$$

y, atendiendo á la ecuacion (20),

$$\text{sen am } (u \sqrt{1-c^2}, c) = \sqrt{1-c^2} \text{ tang } \theta,$$

ó lo que es lo mismo,

$$\text{sen am } (u \sqrt{1-c^2}, c) = \sqrt{1-c^2} \text{ tang am } (u, c') \quad (22).$$

Aplicando ahora á  $\text{tang am } (u, c')$  el teorema que se ha demostrado ya, relativo á la periodicidad para valores reales de  $u$ , tendremos, representando por  $\frac{\omega'}{2}$  la funcion completa  $F(c')$ :

$$\text{tang am } (u, c') = \text{tang am } (u + 2k'\omega', c') \quad (23),$$

siendo  $k'$  un número entero cualquiera.

Ahora bien, siendo una identidad la igualdad (22), podremos cambiar en ella  $u$  en  $u + 2k'\omega'$ , con lo cual se convertirá en

$$\text{sen am } [(u + 2k'\omega') \sqrt{1-c^2}, c] =$$

$$\sqrt{1-c^2} \text{ tang am } (u + 2k'\omega', c') \quad (24).$$

Y como los segundos miembros de las ecuaciones (22) y (24) son iguales en virtud de la (23), tambien lo serán los primeros, resultando:

$$\text{sen am } (u \sqrt{1-c^2}, c) = \text{sen am } [(u + 2k'\omega') \sqrt{1-c^2}, c].$$

Siendo iguales los módulos correspondientes á las amplitudes que entran en los dos miembros de esta ecuacion, no es necesario ponerlo en evidencia, pudiendo escribirse así, sin que se preste á duda de ningun género:

$$\text{sen am } (u \sqrt{1-c^2}) = \text{sen am } [(u + 2k'\omega') \sqrt{1-c^2}],$$

Haciendo en la expresion anterior  $u = 0$ , resultará:

$$\text{sen am } (2k'\omega' \sqrt{1-c^2}) = \text{sen am } 0 = \text{sen } 0 = 0.$$

$$\cos am (2k'\omega' \sqrt{1-c^2}) = \cos am 0 = \cos 0 = 1$$

$$\Delta am (2k'\omega' \sqrt{1-c^2}) = \Delta am 0 = 1,$$

y si en la fórmula (19) del núm. 7 se pone

$v = 2 k' \omega' \sqrt{-1}$ , teniendo en cuenta las identidades anteriores, se obtendrá:

$$\text{sen am } (u + 2 k' \omega' \sqrt{-1}) = \text{sen am } u,$$

que prueba la periodicidad de  $\text{sen am } u$ , cuando  $u$ , pasa por una serie de valores imaginarios.

9. Se puede llegar muy fácilmente á una fórmula que resuma la doble periodicidad. Basta para ello cambiar en la anterior  $u$  en  $u + 2k\omega$ , siendo  $k$  un número entero y  $\omega = F(c)$ , con lo cual sabemos que no se altera: así, se obtiene

$$\text{sen am } (u + 2k\omega) = \text{sen am } (u + 2k\omega + 2k' \omega' \sqrt{-1}),$$

y como

$$\text{sen am } u = \text{sen am } (u + 2k\omega),$$

será, en último resultado,

$$\text{sen am } u = \text{sen am } (u + 2k\omega + 2k' \omega' \sqrt{-1}).$$

10. No entraremos en la explicación de cómo se construyen tablas de valores de la función  $F$  ó de la inversa  $\text{sen am } u$ , para un módulo determinado, pero lo que precede basta para que se comprenda las muchas simplificaciones que en los métodos ordinarios para la aproximación de cuadraturas pueden introducirse.

(Se concluirá.)

M. PARDO.

### FERRO-CARRILES ECONÓMICOS.

Tomamos de los Apéndices á la *Memoria sobre ferro-carriles económicos* (1) de los señores Arnao, Vildósola y Rodríguez, la siguiente nota sobre el sistema Fell, aplicado á la vía férrea franco-italiana en el paso de los Alpes, que se ha abierto en estos últimos días á la explotación. Después publicaremos el resultado de los experimentos practicados, á que han asistido, comisionados por el gobierno español, nuestros compañeros los Ingenieros señores Barron y Aramburu.

#### LOCOMOTORAS CON ADHERENCIA SUPLEMENTARIA.

##### SISTEMA FELL.

La adherencia de la locomotora, según hemos dicho en otras ocasiones, es el intermedio necesario del esfuerzo de tracción. Aumentando este á medida que se disminuye la velocidad, la experiencia ha demostrado que, cuando esta baja de cierto límite, la máquina necesita de la adherencia debida á todo su peso para poder utilizar su potencia dinámi-

ca, y aun aquel resulta con frecuencia insuficiente. Como el peso, favorable á la adherencia, constituye una resistencia en las rampas, era natural que se presentase á los Ingenieros la idea de obtener esa adherencia independientemente, hasta cierto punto, del peso de la máquina. Varios son los sistemas que se han propuesto para este objeto, no ya en los últimos tiempos, sino aun antes de la generalización de la locomotora y en los primeros años de su empleo. Entre estos sistemas, el único en que parece que las ventajas pueden superar á los inconvenientes, es el aplicado actualmente en el ferro-carril provisional del Monte Ceniso, y que consiste en colocar en el eje de la vía un tercer carril, sobre el cual giran ruedas horizontales, fijas á la máquina, y cuya presión sobre dicho carril puede variarse á voluntad dentro de ciertos límites.

Esta idea no es nueva. En 1830 se concedió privilegio de invención para plantearla al Ingeniero inglés *Vignoles*, conocido en el continente por el carril que lleva su nombre, y al Ingeniero sueco *Ericsson*, el inventor de las máquinas de aire caliente. En 1840 se concedió nuevo privilegio á otro inglés, *Enrique Pinkus*. En 1843 propuso el baron Seguiet á la Academia de Ciencias de París el empleo de un tercer carril para aumentar la adherencia y la seguridad de la tracción en los caminos de hierro, obteniendo en 1846 un privilegio de invención. En 1847 se concedió en Inglaterra otro á A. V. Newton. Por último, en 1863, Mr. Fell solicitó y consiguió dos privilegios con el título de *mejoras de las máquinas locomotoras y de los carruajes de los ferro-carriles*, llevando por primera vez la idea del tercer carril al terreno de la práctica, y construyendo una locomotora, que fué ensayada en Inglaterra en el camino de Cromfort á Peakforest.

La línea de ensayo tenía 830 yardas (770 metros) de longitud. Había en ella un trozo en línea recta de 180 yardas (167 metros) con inclinación de 74 milésimas, y otro de 150 yardas (230 metros) en curvas de radios variables de  $2\frac{1}{2}$  á  $3\frac{1}{2}$  cadenas (50 á 70 metros) con inclinación de 83 milésimas. El ancho de la vía era 1,10. Entre los dos carriles y á igual distancia de ambos, se colocó un tercer carril de doble cabeza, á una altura de 0,187 sobre el nivel de la cara superior de los carriles de la vía.

La máquina ensayada llevaba cuatro ruedas horizontales que se apoyaban sobre el carril central, movidas por dos cilindros interiores especiales. Las ruedas verticales marchaban como en las locomotoras ordinarias, sobre los carriles, movidas por dos cilindros exteriores. La presión ejercida por las ruedas horizontales sobre el carril central equivalía á una adherencia de 12 toneladas. El peso de la máquina era, en marcha, de 16 toneladas. Según el informe presentado en 1865 al *Board of trade* por el capitán *Tyler*, esta máquina, trabajando con una presión de ocho atmósferas, pudo remolcar siempre una carga de 24 toneladas en la línea de ensayo, y en algunas ocasiones hasta 30 toneladas.

Cuando no se empleaba la adherencia artificial,

(1) Véase el núm. 22 del año 1867.