AÑO XV
DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO V
DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID 15 DE NOVIEMBRE DE 1867.

TOMO XV. NÚM. 22.

Cálculo del esfuerzo que se ejerce sobre una cimbra.

Contadas serán las veces que las cimbras se sometan á cálculo de ninguna clase, lo cual no depende sin duda del carácter provisional de estas obras solamente, sino que proviene en gran parte de lo embarazoso del método que por lo comun se propone. El objeto de este artículo es dar una solucion sencilla al problema de las cimbras, sobre todo cuando los arcos son circulares, llamando de paso la atencion hácia la utilidad que presta en muchas cuestiones el empleo de ciertas curvas.

Para simplificar los cálculos, poniéndonos al mismo tiempo en un caso desfavorable, supondremos las dovelas reducidas á un ancho infinitamente pequeño, correspondiente á un elemento de la curva media entre el intrados y el trasdos. Llamemos α al ángulo que forma una junta con la vertical, T á la presion que recibe de las dovelas que están encima, d P el peso de la dovela elemental y R la presion por unidad de longitud de curva media que resulta en el punto de la cimbra que se considera: $f =$ tang. φ será el coeficiente de rozamiento correspondiente al material que se emplea, sentado sobre mortero fresco.

En el elemento de dovela A B D C (figura 1.ª), obran las fuerzas siguientes: 1.° el peso d P aplicado al centro de gravedad: 2.° la reaccion de la cimbra R $d s$: 3.° las presiones normales á las juntas T y T — d T: 4.° los rozamientos ocasionados por todas estas fuerzas. Las componentes normales al plano de junta C D son: la proyeccion de d P en sentido perpendicular á C D, que es d P sen. α; la proyeccion de T — d T en igual sentido, que por formar las dos juntas un ángulo infinitamente pequeño es igual á ella misma; la del rozamiento sobre la junta A B, dirigido de B á A, que siendo igual á f(T — d T) dará una proyeccion igual á f(T — d T) sen. B O D, ó f T $d\alpha$, despreciando los infinitamente pequeños de segundo órden; y por fin la reaccion de la junta inferior T, que equilibra á las demás. Las componentes paralelas al plano C D, son: la proyeccion del peso de la dovela, que es d P cos. α; el rozamiento ocasionado por el mismo, que es $f\, d$ P sen. α; la proyeccion de T — d T en sentido de C D, que es (T — d T) sen. B O D, ó T $d\alpha$; el rozamiento ocasionado sobre C D por la componente normal del rozamiento en A B, que es $f \times f$ T $d\alpha$, ó f^2 T $d\alpha$; la componente paralela del rozamiento dirigido de B á A, que queda destruida por el rozamiento que se ejerce de C á D por causa de la presion T, con una diferencia infinitamente pequeña; y la resistencia que opone la cimbra en la extension $d s$ de la curva media, representada por R $d s$. El equilibrio en los dos sentidos queda expresado por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} d\,T - f\,T\,d\alpha = \text{sen.}\ \alpha.\ d\,P \\ R\,d s = (\cos.\ \alpha - f\ \text{sen.}\ \alpha)\ d\,P - (1 + f^2)\,T\,d\alpha. \end{array}\right\} \quad (1)$$

fórmulas que se pueden deducir inmediatamente de las de Navier (*Résumé*, 621).

La primera ecuacion se integra multiplicándola por $e^{-f\alpha}$, siendo e la base del sistema de logaritmos neperianos; y da

$$T = \int_{\beta}^{\alpha} e^{f(\alpha - \alpha')}\ \text{sen.}\ \alpha'\ d.\,P, \quad (2)$$

designando por β el ángulo que corresponde á la última dovela que se ha colocado, y por α' un ángulo comprendido entre α y β.

La integracion indicada y la resolucion completa del problema dependen solo de la forma de la funcion P. Empezaremos por suponer que la rosca de la bóveda es de espesor constante, cualquiera que sea la curva del intrados, y despues discutiremos el caso en que tenga la forma circular.

I.

Sea c el espesor constante de la bóveda y p el peso específico de las dovelas, el elemento de peso será, refiriéndolo á la unidad de longitud de cañon,

$$d\,P = p\,c\,d s$$

y la ecuacion (2) se convierte en esta;

$$T = p\,c \int_{\beta}^{\alpha} e^{f(\alpha - \alpha')}\,\text{sen.}\,\alpha'\,d\,s'.$$

El producto sen. $\alpha' d s'$ es el elemento de la ordenada vertical de la curva media, y representándolo por $d\,y'$, se puede poner la integral bajo esta forma:

$$T = p\,c \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-f\alpha'}\,d.\,y'}{e^{-f\alpha}}$$

El valor de esta integral se puede encontrar siempre por un procedimiento gráfico muy sencillo. Si se tiene trazado un cuadrante cualquiera de la espiral logarítmica cuya ecuacion sea $z = e^{f\alpha}$; (fig. 2.ª) y se van aplicando sus rádios perpendicularmente á la linea vertical O A (fig. 3.ª), de tal modo que el rádio mayor M N caiga en A n y en cada punto a se coloque en la posicion $a\,p$ el rádio M P que forme con el primero el ángulo P M N igual al b C a que forma con la vertical la junta del punto b, que corresponde horizontalmente al a, resultará formada una curva $n\,p\,q$ cuyas coordenadas son los valores de z é y' correspondientes al mismo valor de α. El elemento del área $a\,a'\,p'\,p$ tendrá por expresion el producto $z\,d\,y'$, ó $e^{-f\alpha} d\,y'$, porque el ángulo α se ha tomado en la espiral de N á Q; y si el punto d es el que corresponde al ángulo β, es decir, á donde llega la carga de la bóveda, la integral de que se trata equivale al área $c\,r\,p\,a$ dividida por la longitud $a\,p$. Este cociente multiplicado por el factor constante $p\,c$ da la presion normal sobre la junta $k\,l$.

Ahora que el uso del planímetro está tan generalizado, no ofrece dificultad ni molestia la medida de las áreas y por eso el método para hallar la presion sobre la junta es esencialmente práctico. Veamos cómo puede hallarse tambien gráficamente la presion sobre la cimbra.

Eliminando entre las dos ecuaciones (1) el producto T $d\,\alpha$, resulta

$$R\,d\,s = \left(\cos.\,\alpha + \frac{\text{sen.}\,\alpha}{f}\right) d.\,P - \frac{1+f^2}{f}\,d\,T. \quad (3)$$

Poniendo en lugar de dP su valor, y haciendo $f = \text{tang.}\,\varphi$, y $d\,T = p\,c \times d.\,q$, se puede escribir

$$R = \frac{p\,c}{\text{sen.}\,\varphi}\left[\text{sen.}\,(\alpha + \varphi) - \frac{d\,q}{d\,y}\cdot\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\varphi}\right]:$$

q designa el área $c\,r\,p\,a$ dividida por la longitud $p\,a$, con arreglo á la ecuacion (2). Si se calcula para dos ó tres puntos este cociente y se toma su valor sobre la ordenada $a\,p$ respectiva, se obtendrá una curva $c\,t\,u$ cuyas ordenadas como $t\,a$ serán los valores de q para el punto a. La tangente trigonométrica del ángulo $t\,g\,a$ que forma con el eje la tangente $t\,g$ es igual á $\frac{d\,q}{d\,y}$. La ecuacion última se puede poner bajo esta forma:

$$R = \frac{p\,c}{\text{sen.}\,\varphi\,\cos.\,\varphi}\left(\text{sen.}\,(\alpha + \varphi)\,\frac{\cos.\,\varphi}{\text{sen.}\,\alpha} - \frac{d\,q}{d\,y}\right)\text{sen.}\,\alpha.$$

Para construirla, tomaremos en la vertical (fig. 4.ª) una longitud O A = 1, y despues de trazar O B que forme con esta vertical el ángulo φ de rozamiento, bajaremos la perpendicular A B y por el punto B tiraremos la vertical indefinida B C. Tomando B D = tangente $t\,g\,a = \frac{d\,q}{d\,y}$, la perpendicular D F á la direccion O M del plano de junta $l\,k$ de la figura 3.ª es proporcional á la expresion de R. En efecto, D F = D E sen. D E F = D E sen. α; pero D E = B E — B D; y como

$$B\,E = B\,O\,\frac{\text{sen. B O E}}{\text{sen. B E O}},\ \text{y } B\,O = A\,O\cos.\,A\,O\,B,$$

resulta:

$$D\,E = \cos.\,\varphi\,\frac{\text{sen.}\,(\alpha + \varphi)}{\text{sen.}\,\alpha} - \frac{d\,q}{d\,y}.$$

Multiplicado esto por un factor constante dá el valor de R.

Esta construccion hace ver cómo se reparte la presion sobre la curva de la cimbra, y el punto del arco en que es nula, para no calcularla sino desde allí hácia arriba. Pero cuando la longitud de intrados que se quiera considerar difiera poco de una línea recta, se puede hacer otra construccion aproximada que dé la resultante de las presiones de una sola vez. Para el arco ó extension $b\,e$ (fig. 3.ª) cargado hasta d, se toma en la vertical $b\,f$ una longitud igual á la diferencia T — T′ de las presiones sobre las juntas b y e dividida por el factor $p\,c$, dada inmediatamente por la curva $c\,t\,u$; se trazan las rectas $f\,m$ horizontal y $b\,m$ que haga con la vertical el ángulo constante φ de rozamiento, y la recta $m\,i$, perpendicular á $b\,m$, ó sea que haga con la horizontal el mismo ángulo φ, dá un punto i en la horizontal del e: la distancia $e\,i$ es proporcional á la resultante que se busca. Para demostrarlo, integremos la ecuacion (3) despues de sustituir por d P y por f sus valores y resultará:

$$\int \mathrm{R}\, d\, s = p\, c \left(x' - x + \frac{y' - y}{\text{tang. } \varphi} \right) - \frac{(\mathrm{T}' - \mathrm{T})}{\text{sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi}.$$

Tirando por b la recta $b\,s$ perpendicular á $b\,m$, y prolongando las horizontales hasta ella, resulta:

$$e\,i = e\,s' - i\,s' = e\,s' - m\,s,$$

$$e\,s' = eh + h\,s' = eh + \frac{b\,h}{\text{tang. } h\,s'\,b} = \varphi' - \varphi + \frac{y' - y}{\text{tang. } \varphi},$$

$$m\,s = \frac{b\,m}{\text{sen. } m\,s\,b} = \frac{b\,f}{\text{cos. } f\,b\,m \text{ sen. } m\,s\,b} = \frac{\mathrm{T}' - \mathrm{T}}{p\,c \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi},$$

y por consiguiente

$$\int \mathrm{R}\, d\, s = p\, c \times e\, i$$

El punto de aplicacion de esta resultante se hallará entre la mitad y el tercio de la longitud $b\,e$, hácia la parte superior.

II.

Cuando el arco es circular, llamando r al rádio de la curva media entre el intrados y el trasdos paralelos, se tiene

$$d\,s = r\,d\,\alpha,$$

la ecuacion (2) se puede integrar y dá

$$\mathrm{T} = \frac{p\,c\,r}{1 + f^2} \left[e^{f(\alpha - \beta)} (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta) - (\text{cos. } \alpha + f \text{ sen. } \alpha) \right];$$

y en virtud de este valor la segunda ecuacion (1) se reduce á esta

$$\mathrm{R} = p\,c \left[2 \text{ cos. } \alpha - e^{f(\alpha - \beta)} (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta) \right].$$

La construccion de estas fórmulas es muy sencilla siempre que se tenga cortada una plantilla espiral como la de la figura 2.ª. Para eso, desde el centro O (fig. 5.ª) del arco de bóveda M N se toma una longitud O A en sentido vertical é igual á una unidad cualquiera de medida, y se traza el círculo A d b O capaz del complemento del ángulo de rozamiento, así como la semicircunferencia O a m cuyo centro está en A. Enseguida, suponiendo que se estudie el caso en que la cimbra está cargada hasta D, se traza el rádio O D y aplicando la plantilla con su centro en el punto O, se hace pasar la curva por el punto d en que la direccion de la junta corta al primer círculo, señalando con el lápiz el arco indefinido de espiral $d\,n$. Hecho esto, para estudiar los valores correspondientes á un punto B, no hay que hacer más que tirar el rádio O B, y resulta:

1.° Que la distancia $b\,c$, comprendida entre el primer círculo y la espiral es proporcional á T.

2.° Que la distancia $c\,a$ comprendida entre la espiral y el segundo círculo es proporcional á R.

3.° Que para obtener la resultante de las presiones sobre la cimbra en la extension D B basta trazar $b\,k'$ que forme con la horizontal el ángulo φ, y tomar en ella la longitud $b\,k'$ igual al desarrollo del arco $b\,d$: la longitud $c\,k'$ es proporcional á la resultante. Para obtener su posicion no hay más que tirarle una paralela A r y unir el punto r con el O. Si se estudiase solo una porcion B C de arco, se compondrian por la regla del paralelógramo las resultantes que corresponden á D B y D C.

La demostracion de estas proposiciones es fácil. En el triángulo O A b, se verifica que

$$\mathrm{O}\,b = \mathrm{O\,A} \frac{\text{sen. O A } b}{\text{sen. O } b \text{ A}} = \frac{\text{cos. } (\alpha - \varphi)}{\text{cos. } \varphi} = (\text{cos. } \alpha + f \text{ sen. } \alpha),$$

y como hemos llamado β al ángulo M O D, se tendrá:

$$\mathrm{O}\,d = (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta).$$

En una espiral logarítmica, dos rádios cualesquiera son entre si como la exponencial correspondiente al ángulo que forman, de modo que siendo $(\alpha - \beta)$ el ángulo d O c, se tiene:

$$\mathrm{O}\,c = \mathrm{O}\,d \times e^{f(\alpha - \beta)} = e^{f(\alpha - \beta)} (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta),$$

y por consiguiente

$$b\,c = \mathrm{O}\,c - \mathrm{O}\,b = e^{f(\alpha - \beta)} (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta) - (\text{cos. } \alpha + f \text{ sen. } \alpha) = \frac{\mathrm{T}(1 + f^2)}{p\,c\,r}.$$

En el triángulo rectángulo O $a\,m$, O a es proyeccion de O m = 2 O A, por consiguiente, O a = 2 cos. α, y

$$c\,a = \mathrm{O}\,a - \mathrm{O}\,c = 2 \text{ cos. } \alpha - e^{f(\alpha - \beta)} (\text{cos. } \beta + f \text{ sen. } \beta) = \frac{\mathrm{R}}{p\,c}.$$

Para hallar la resultante de las presiones sobre la cimbra, observaremos que en cada punto C actúa la fuerza R $r\ d\ \alpha$, ó sea $a'\ c' \times p\ c\ r\ d\ \alpha$. Cada una de estas presiones elementales la descompondremos en las dos direcciones $b\ h$ y $b\ k$, tales que la direccion $b\ h$ sea vertical y que el ángulo $h\ b\ a$ sea igual á $90^\circ - \varphi$, y observaremos: 1.°, que la tangente en un punto c á la espiral forma con el rádio O c un ángulo igual tambien á $90^\circ - \theta$, y es por consiguiente paralela á la cuerda A b correspondiente del primer círculo; 2.°, que la tangente A f á este círculo en el punto A forma el mismo ángulo $90^\circ - \varphi$ con la vertical y es paralela á $b\ k'$; y 3.°, que el ángulo f A b es igual á A O $b = \alpha$, y lo mismo vale el ángulo que forme con b A la tangente en b.

Dejando aparte el factor constante $p\ c\ r$, notemos que se puede poner

$$a'\ c' \times d\ \alpha = (\mathrm{O}\ a' - \mathrm{O}\ c')\ d\ \alpha =$$

$$\cos.\ \varphi \left(\frac{\mathrm{O}\ a'}{\cos.\ \varphi}\ d\ \alpha - \frac{\mathrm{O}\ c'}{\cos.\ \varphi}\ d\ \alpha \right)$$

Para proceder á la descomposicion, hagamos girar á la fuerza que tiene este valor y está dirigida segun $a'\ c'$, así como los ejes $b\ h$ y $b\ k$, un ángulo igual al complemento de φ: la línea $b\ h$ tomará la direccion de $b\ c$ y se confundirá con ella; la $b\ k$ tomará la direccion $b\ k'$ paralela á A f; y $a'\ c'$ quedará paralela á la tangente en c' á la espiral.

Formando el ángulo a' O $a'' = d\ \alpha$, y tirando la recta $b''\ l$ paralela á A f, hasta que corte á la cuerda A b', se tiene:

$$a'\ c' \times d\ \alpha = \cos.\ \varphi\ (l\ b' - c'\ c'').$$

En efecto, en el triángulo infinitamente pequeño $b'\ l\ b''$, los ángulos $b'\ l\ b''$ y $b''\ b'\ l$ son iguales por serlo ambos al f A $b' = \alpha$ y el lado $b'\ l$ es el doble de la proyeccion de $b'\ b''$ sobre su direccion; pero el arco $b'\ b''$ tiene por amplitud el doble de $d\ \alpha$, y su rádio es $\frac{1}{2 \cos.\ \varphi}$, porque pertenece á un círculo capaz del complemento de φ, trazado sobre una cuerda igual á la unidad, por consiguiente,

$$b'\ b'' = \frac{1}{2 \cos.\ \varphi} \times 2\ d\ \alpha, \quad \text{y}\ l\ b' = 2\ b'\ b''\ \cos.\ \alpha =$$

$$\frac{2 \cos.\ \alpha}{\cos\ \varphi}\ d\ \alpha = \frac{\mathrm{O}\ a'}{\cos.\ \varphi}\ d\ \alpha.$$

En el pequeño triángulo rectángulo $c'\ c''\ e$, $c'\ e$ es el arco trazado con el rádio O c', y vale O $c' \times d\ \alpha$, y como el ángulo $e\ c''\ c'$ es el complemento de φ,

$$c'\ c'' = \frac{c'\ e}{\cos.\ \varphi} = \frac{\mathrm{O}\ c'}{\cos.\ \varphi}\ d\ \alpha.$$

Se vé por esto que la descomposicion de la fuerza $a'\ c' \times d\ \alpha$ en las direcciones $b\ h$ y $b\ k$ equivale á proyectar los elementos $c'\ c''$ y $l\ b'$ en direccion de $b\ c$ y A f ó $b\ k'$. Los elementos $c'\ c''$ forman el arco de espiral $d\ c$; y para proyectar $l\ b'$ lo reemplazaremos por los lados $b''\ b'$, $b''\ l$ que son iguales por oponerse á ángulos iguales: la suma de los elementos $b'\ b''$ forman el arco $b\ d$, y el contorno curvilíneo $b\ d\ c$ se podrá reemplazar por su resultante $b\ c$. Despues, como todos los lados $b''\ l$ son paralelos á $b\ k'$, la suma equivale á una longitud $b\ k'$, igual arco $d\ b$. Y estando situadas $b\ k'$ y $b\ c$ en la direccion de los ejes de proyeccion, sus proyecciones serán iguales á ellas mismas, y serán tambien las de $a'\ c \times d\ \alpha$.

Con esto queda demostrada la tercera proposicion. Como todas las componentes elementales concurren en el centro O, tambien pasa por él la resultante, y como su direccion ha de formar con $c\ k'$ un ángulo igual á $90^\circ - \varphi$, la recta A r paralela á $c\ k'$ da en el primer círculo un punto r tal que A r O $= 90^\circ - \varphi$, y por consiguiente O r es la direccion de dicha resultante.

El punto n en que la espiral corta al segundo círculo da á conocer la junta O N en que la bóveda deja de cargar la cimbra cuando las dovelas llegan á D.

La plantilla espiral debe trazarse de modo que el radio menor M Q (fig. 2.ª) sea algo más pequeño que el menor valor que puede tener la expresion ($\cos.\ \theta + f\ \text{sen.}\ \theta$). Como las dovelas no empiezan á cargar la cimbra hasta que pasan del ángulo de resbalamiento, θ será á lo más, igual á $90^\circ - \varphi$, y el menor valor de aquella expresion será 2 sen. φ, que corresponde al punto p de interseccion de los dos círculos. El valor de φ, deducido de las experiencia, varía poco, y tomando entre los extremos un tipo medio y sencillo, haremos

$$f = \text{tang.}\ \varphi = \frac{1}{2}:$$

Con este valor se halla trazada la espiral de la figura segunda, cuya unidad es de cinco centímetros. Su trazado completo está dado en la tabla siguiente:

Angulos. $\dfrac{\alpha}{{}^1\!/_2\,\pi}$	Rádios. r
0,0	0,855
0,1	0,954
0,2	1,000
0,3	1,082
0,4	1,170
0,5	1,266
0,6	1,369
0,7	1,481
0,8	1,602
0,9	1,733
1,0	1,874

Para el estudio práctico de este problema conviene tomar por unidad un decímetro, y despues de dibujada la curva recortar una plantilla de carton fuerte, que sirve para todos los proyectos. Si se quisiere variar el coeficiente de rozamiento, habria que calcular otra espiral; pero como los resultados no se diferencian mucho de los que da la espiral que presentamos, no hemos creido necesario incluir los cálculos de ninguna otra.

EDUARDO SAAVEDRA.

FERRO-CARRILES ECONÓMICOS.

Nuestros compañeros los señores D. Jacobo Gonzalez Arnao, D. Luis Torres Vildósola, y D. Gabriel Rodriguez, han presentado al señor ministro de Fomento un extenso Apéndice á la *Memoria sobre los medios de reducir los gastos de establecimiento de los ferro-carriles de segundo órden*, que redactaron, por encargo del Gobierno, y presentaron en 30 de Noviembre próximo pasado.

Este Apéndice consta de 16 notas, cuyo índice copiamos á continuacion:

Indice de las notas.

Nuestros compañeros han solicitado de la superioridad la autorizacion competente para publicar completa la memoria y el apéndice, del cual tomamos el siguiente *Estado* relativo á varias locomotoras de gran potencia, cuyos datos creemos interesarán á nuestros lectores.

Para la inteligencia de dicho estado, indicaremos las bases del cálculo de la potencia de las máquinas en él citadas.

El número de caballos de vapor se calcula suponiendo un caballo por cada 40 decímetros cuadrados de superficie de vaporizacion; término medio deducido de la observacion de muchas máquinas de mercancías, funcionando en diferentes condiciones de trabajo.

El esfuerzo teórico de traccion en las llantas, está deducido de la fórmula

$$E = \frac{P\,d^2\,l}{D}$$

en la cual E = representa dicho esfuerzo,
d = diámetro de los cilindros,
l = carrera del émbolo,
D = diámetro de la rueda.
p = Tension del vapor en la caldera, descontando una atmósfera.

El coeficiente de adherencia se fija en $\frac{1}{6,5}$, como término medio.

Cada tonelada de locomotora ó tender se supone que da lugar á una resistencia de 8 kilógramos en línea horizontal, con curvas de rádio variable de 200 á 500 metros, segun la flexibilidad de la máquina.

CIMBRAS.