

TIRANTES SUPERIORES

DE LOS

PUENTES COLGADOS.

Aunque el uso de tirantes superiores es de necesidad en los puentes colgados de varios tramos, cuando son movibles los apoyos intermedios, no se había escrito una teoría completa que sirviera para determinar sus dimensiones, hasta que Mr. Jollois publicó en los *Annales des ponts et chaussées* (1859, primer semestre) un notable artículo sobre este asunto. El fundamento en que este distinguido Ingeniero apoya su cálculo consiste en buscar, suponiendo que dos tramos contiguos están desigualmente cargados, cuándo serán exactamente iguales los empujes que producen sobre la columna móvil el tramo más cargado por un lado, y el ménos cargado por el otro; y la variación de los empujes la considera como dependiente de dos causas, que son, el cambio de luz y de flecha de los cables y los tirantes, y el aumento ó disminución de longitud que estos experimentan, por lo que su tensión crece ó mengua.

Cuando he de dar á la prensa la segunda edición de mi *Teoría de los puentes colgados* (Madrid, 1864) creí conveniente incluir en ella el cálculo de los tirantes superiores al tablero, y sin apartarme en el fondo de la marcha seguida por Mr. Jollois, introduje en la ecuación de equilibrio propuesta por este autor una corrección, que consiste en considerar que el movimiento de la columna central cesará, no cuando los empujes sean iguales, sino cuando la resultante de los dos empujes y de la presión vertical de las cadenas sobre su extremo superior coincida con el eje de dicha columna y se destruya contra el punto de apoyo de su base; corrección que se dirige más á plantear el problema con el rigor necesario en un libro de texto que á obtener mayor exactitud en los resultados, puesto que al presentar la fórmula final indico que el término introducido por esa

causa, que es el tercero del denominador, tiene apenas influencia.

A estas explicaciones me obligan las alusiones apremiantes que á mi pequeña obra se sirve hacer el autor del artículo inserto en el número de la *Revista* correspondiente al 1.º de Diciembre último. Como creo que la segunda edición sea poco conocida, me parece necesario ayudar á la claridad de la discusión, reproduciendo aquí los párrafos 79 y 80, sin enmendar aquellas erratas que no están salvadas al fin del libro (1).

«79. El medio más eficaz de evitar esos movimientos es el empleo de tirantes superiores AB, C, CD, E indispensables si el apoyo intermedio es una biela movable. En este caso, cuando el tramo AC esté más cargado, el apoyo girará sobre su base desviándose el punto C una cantidad CC'' hacia dicho tramo, hasta tanto que la diferencia de empujes ocasionada por la variación de carga y de flechas, combinada con la presión total en C, dé una resultante dirigida según C'C''. Llamando Q y Q', los empujes totales en AC y CE, P los pesos totales de la mitad de cada tramo, η la desviación C'C'' y a la altura CC', se habrá de verificar la ecuación

$$\frac{Q_1 + \Delta Q_1 - Q - \Delta Q}{P} = \frac{\eta}{a}$$

La fórmula (10), cuando se dá un incremento pequeño y simultáneo á la luz y la flecha produce la expresión

$$\Delta Q = \frac{p H^2}{2 f} \left(\frac{\eta}{H} - \frac{\varphi}{f} \right)$$

atendiendo á que el producto pH es constante; y como la relación $\frac{\eta}{H}$ es una fracción tan pequeña de $\frac{\varphi}{f}$, que no suele llegar á 0,03, se puede despreciar y atender sólo al incremento φ .

Falta ahora ver cuánto varía la flecha por un aumento en la luz. Para esto observaremos que por las ecuaciones (32) y (35), la longitud efectiva del cable de longitud primitiva L, y con la carga p es, cuando tiene dimensiones y carga dadas,

(1) Para mayor facilidad, he cambiado la figura 39 de mi obra por la 2.ª de la lámina 64 de la *Revista*.

$$L' = L + \frac{4f}{3H} (b + b_1) p$$

ó tambien, teniendo entonces la flecha f y la luz H .

$$L' = H + \frac{2}{3} \frac{f^2}{H^2}$$

De ambas expresiones se deduce

$$L = H + \frac{2}{3} \frac{f^2}{H} - \frac{4f}{3H} (b + b_1) p,$$

que es la longitud que ha de tener el cable para alcanzar la flecha f con la luz H y la carga p .

Dando en esta expresion los incrementos á H y f , resulta, despreciando las cantidades pequeñas respecto de φ ,

$$0 = \eta + \frac{4f}{3H} \varphi \left(1 - \frac{(b + b_1) p}{f} \right),$$

de donde se deduce

$$\varphi = -\frac{3}{4} H \frac{\eta}{f - (b + b_1) p}.$$

$$\eta = \frac{4f}{3H} \frac{p' - p}{\frac{p' + p}{f} + \frac{2\sigma}{f' - b'\sigma} \cdot \frac{f^2}{f^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{p' + p + 2\sigma}{a} \cdot \frac{f^2}{H^2}}$$

De todos los términos del denominador, es el más importante el segundo, que dá por sí sólo un cociente muy aproximado, y el último tiene apenas influencia.

Con el valor de η se puede calcular el de φ para apreciar la movilidad del puente, y el de φ' para que hallando con él el nuevo valor del empuje Q' , se pueda saber si la tension del tirante comprometerá demasiado su resistencia, y aumentar en este caso su peso.

80. En todas estas investigaciones se ha dejado de tener en cuenta el aumento de flecha propio del cable cuando en vez de la carga p recibe otra p' mayor; pero con esto se han simplificado mucho las fórmulas sin perder nada en su aproximacion. Tampoco se discuten los casos en que hay varios tramos, porque se aplican los mismos procedimientos sin más diferencia que tener presente entonces

Llamando σ al peso de la unidad de longitud del tirante y f' y φ' á su flecha y la variacion de esta, se tendrá para la curva que dicho tirante afecte:

$$Q' = \frac{\sigma H^2}{2 f'}$$

$$\Delta Q' = -\frac{\sigma H^2}{2 f'} \cdot \frac{\varphi'}{f}$$

$$\varphi' = -\frac{3}{4} H \frac{\eta}{f' - b'\sigma},$$

y la ecuacion de equilibrio, cuando un peso p' mayor que p carga sobre el tramo AB, será

$$\frac{p H^2}{2 f} \left(1 - \frac{\varphi}{f} \right) + \frac{\sigma H^2}{2 f'} \left(1 - \frac{\varphi'}{f'} \right) - \frac{p H^2}{2 f'} \left(1 + \frac{\varphi}{f} \right) - \frac{\sigma H^2}{2 f'} \left(1 + \frac{\varphi'}{f'} \right) = \frac{\eta}{a} (p' + p + 2\sigma) H;$$

de la que, reemplazando φ y φ' por sus valores en η , se deduce, atendiendo á que la fraccion $\frac{(b + b_1) p}{f}$ es muy pequeña en el cable de suspension,

que la suma de los aumentos de flecha de los tramos cargados, ha de ser igual á la suma de las disminuciones de los que no lo están.»

Se ve con esto que no me he ocupado más que del primero de los casos estudiados por el Sr. E. E., es decir, de un puente de dos tramos con apoyo intermedio móvil, cuya explicacion termina en la tercera plana del articulo citado. Despues de usar, si bien con ménos brevedad, los mismos razonamientos, las mismas transformaciones y casi el mismo método que acabo de presentar al lector, la fórmula á que llega el Sr. E. E. es:

$$x = \frac{H^2}{2 f} \frac{p' - p}{(p' + p) \left(\frac{3}{4} \frac{H^3}{2 f^3} - \frac{1}{a} \right) + 2\sigma \left(\frac{3}{4} \frac{H^3}{2 f^3} - \frac{1}{a} \right)};$$

en la cual las notaciones son las mismas que en la mia, salvo que llama x y π á lo que yo representé por η y σ . Y al fin de la quinta plana de su trabajo, el autor coloca la nota que copio, corregida de una ligera errata:

«NOTA. La fórmula (3) sólo difiere de la dada por el Sr. de Saavedra en su excelente obra sobre puentes colgados (párrafo 79) por la sustitucion en el denominador de f'^2 en vez de $f'^2 (f' - b'\sigma)$ (salva una equivocacion de signo); cuyo término considera el Sr. de Saavedra como

el más importante de los que forman el citado denominador.

Esta diferencia procede, á mi entender, de haber considerado el Sr. de Saavedra que la letra f tenía la misma significacion en las dos fórmulas que dan los valores de L' , lo cual no es cierto para el cable y *mucho menos para el tirante*.

Debe además notarse:

1.º Que aunque b y b_1 (párrafo 79) sean muy pequeñas, esto no legitima el no haberlas diferenciado.

2.º Que el igualar los dos valores de L' es, á mi juicio, un rodeo inútil y que debería conducir á un valor indeterminado si se hubieran completado las operaciones.

3.º Que el valor de la cantidad representada por b' , y que según se deduce de la citada obra se debe calcular por la misma fórmula que da b y b_1 , está dada por una expresión *algo* distinta de aquella fórmula.

Y 4.º y último. La principal equivocacion en que reposa el artificio que el Sr. de Saavedra emplea para calcular el valor de τ , consiste, á mi entender, en suponer constante la cantidad L' cuando dicha longitud es *necesariamente una funcion de H y de f* .

Expuestos los preliminares necesarios, podemos entrar en materia. Conforme dice muy bien el Sr. E. E., su fórmula sólo difiere de la mía en el término b' , y de explicar la verdadera causa de esta diferencia es de lo que trata. Las letras b , b_1 representan en mis fórmulas las variaciones de flecha que ocasionan las dilataciones elásticas del cable y del fiador, producidas por una unidad de carga por metro lineal de tablero; y la letra b' representa la variacion de flecha del tirante, ocasionada por la dilatacion que en él produce la unidad lineal de su propio peso. No cabe duda que al plantear la cuestion deban tenerse en cuenta estas cantidades, si se considera que la dilatacion elástica no es constante para el cable, y *mucho menos para el tirante*, porque dependiendo de la figura y dimensiones de la curva, ó influyendo *algo* en ella, es *necesariamente una funcion* de H y de f . Pero el Sr. E. E. no ha querido, ó no se ha acordado de introducir en sus datos estas dilataciones, y es evidente que esto basta para que no hayan salido en el resultado, y para que falte el término con b' , único que yo había conservado, por ser demasiado pequeños los que dependen de b y de b_1 . De modo que mi fórmula es más aproximada que la del Sr. E. E., y como al mismo tiempo indico el valor relativo de sus términos para que se puedan suprimir los que menos importen, resulta también más práctica y más sencilla, como deben serlo todas las que se apliquen á proyectos.

Más, ni aunque fuera razonable la supresion

de la b' , resultaria divergencia digna de apreciarse en nuestras fórmulas. Apliquelas el señor E. E. á un puente cuyas proporciones se aparten poco de los modelos usados, y verá que sólo dan una diferencia de CINCO MINUTOS en la inclinacion del apoyo, y de UN VIENTEAVO en la tension del tirante, convenciéndose así de que ha corregido una fórmula en una cantidad mínima, en perjuicio de la exactitud, y sin hacer más sencilla su expresion; resultado que hubiera podido deducir, por otra parte, con sólo suponer $b' = 0$ en mi fórmula, economizando así cerca de la mitad en la composicion de su artículo.

Con esto queda, á mi juicio, explicada la cuestion de la fórmula (5) del Sr. E. E.; pero tengo por precision que hacerme cargo de la nota arriba copiada, motivo especial de esta réplica.

El Sr. E. E. empieza por no echar de ver que, como ántes he dicho, si un término ó cantidad no sale al fin de un cálculo, es porque no ha entrado al principio, y explica la diferencia entre nuestras dos fórmulas por haber yo dado dos significaciones distintas á la letra f . Primero, esto no es cierto; porque designo con la letra f la flecha que tiene el cable colocado en obra y cargado con la carga permanente, y nada más que eso; y segundo, no es oportuno, porque háganse con f los desatinos que se quieran, no puede nunca resultar de ellos que aparezca la b' , que es una funcion cuya forma no se desenvuelve en todo el artificio que he empleado.

Pero no se contenta el Sr. E. E. con explicar en qué consiste la diferencia á su entender, sino que añade una lista tan abundante de equivocaciones, que no podrian ser más lamentables si de veras existiesen en los pocos renglones de mi párrafo 79, y tendrían la curiosísima propiedad de compensarse tan puntualmente, que sólo en la f consistiera el error descubierto.

Empieza el Sr. E. E. por observar que b y b_1 debían haberse diferenciado. Tendría razon si las tales cantidades le sirvieran de algo; pero si no las usa ni las nombra en su cálculo, ¿para qué pide que se entretenga nadie en diferenciarlas? Fuera de que b y b_1 , por sí no necesitan tal operacion, porque, sobre ser pequeñas, su variabilidad es insensible; pero b' si la necesita, lo cual no introduce otra alteracion en las fórmulas que escribir $+ b'$ donde diga $- b'$. ¿Quiere el Sr. E. E. dar acogida á esta equivocacion de signo en el paréntesis del

principio de la nota? Si así lo hace, habré de agradecerse, y si no, pase por falta ó por descuido, que ni aún por eso desaparecerá la δ' de donde se encuentra.

Dice despues que el igualar los dos valores de L' es un rodeo inútil. No acordándose de las dilataciones, podrá ser inútil todo lo que á ellas se refiera; pero yo igualo la longitud del cable en funcion de sus dilataciones á la que tiene en virtud de las dimensiones efectivas que llega á tomar; y esto no sólo es útil, sino necesario para eliminar la longitud del cable dilatado, y no puede producir indeterminación aunque se completen todas las operaciones.

Observa el Sr. E. E. que la fórmula que da δ' (dilatacion del tirante) es algo diferente de la que da δ (dilatacion del cable) y δ_1 (dilatacion del fiador). No encuentro posible más diferencia que la que resulte de formar el tirante una cadeneria, y no una parábola como se supone; y si el Sr. E. E. lo hila tan delgado, le invito á que calcule con números esa diferencia, y verá la importancia de su observacion.

La última es la peor. Si es la principal equivocacion en que reposa mi artificio, es singular que la causa de la diferencia sea otra y que esta venga en el acompañamiento no escaso de los errores inocentes. Pero dejando pasar lo de que L' es variable por ser funcion de H y f , pues una funcion de *dos* variables puede ser constante sin dificultad, no admito que yo suponga constante á L' en ninguna parte. Precisamente la elimino de las fórmulas por ser variable, y me quedo con una constante en su lugar, que es la longitud L del cable, cuando no tiene tension alguna. Lo extraordinario es que quien toma á L' como constante es el mismo Sr. E. E. en la página 2.^a, líneas 15, 16 y 20 de su artículo, y eso es lo único que tiene original, y ahí es donde se pierde la δ' , y véase por qué fatal instinto viene á señalar el punto vulnerable de su propia obra, que por una rara ilusion se le representa colocado en la agena.

No acabaré sin dar las gracias al Sr. E. E., no por las frases de cortesía con que menciona mi libro, sino por más señalado servicio que le debo. Los párrafos de su nota me han hecho estudiar con detenimiento un problema que, por el escaso interés que hoy alcanza, no habia fijado bastante mi atencion, y he venido á conocer que mi fórmula, para ser exacta, necesita una correccion de más importancia que la que puede dar la cantidad δ' si estuviera de

sobra. Buscándola, tiene el Sr. E. E. ocasion de ejercer, con más provecho que hasta ahora, su critica científica, ya que ha pasado sobre el error, lo mismo que yo, sin conocerlo en su reciente trabajo. Hasta el número próximo le espero para cederle la palma de descubrir al público esta verdadera equivocacion: entre tanto, en manos del Director de este periódico dejo un artículo en que se manifiesta cuál es la falta á que aludo, y en el que doy las fórmulas corregidas y el método para aplicarlas. Si el Sr. E. E. no responde á este llamamiento, me creeré con derecho á hacer insertar el artículo para enseñarle dónde está efectivamente el punto débil, y aprovechar la ocasion de enmendar mi obra, que siempre deberá esta mejora á sus estudiosas tareas.

EDUARDO SAAVEDRA.

Nota sobre las expropiaciones para la construccion de los ferro-carriles.

En diversas ocasiones, la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS ha llamado la atencion sobre las dificultades que frecuentemente presenta la expropiacion de los terrenos necesarios á una obra, y los perjuicios que pueden sufrir los intereses del Estado y del público suspendiendo su ejecucion. Estas dificultades, que á veces paralizan años enteros las obras costeadas y dirigidas por el Estado, se resuelven por las compañías que construyen los ferro-carriles, sacrificando enormes sumas á la imposibilidad en que se hallan de esperar indefinidamente la terminacion de los expedientes de expropiacion, circunstancia que les obliga, en la mayor parte de los casos, á renunciar los derechos que la ley les concederia si el tiempo de la ejecucion no fuese limitado.

Se ha propuesto generalmente, como medio de salvar esos inconvenientes, la reforma de la ley de expropiaciones, á cuyo efecto se han puesto en relieve sus principales defectos, entre los que deben contarse en primer lugar la indeterminacion de los plazos para la tramitacion de los expedientes, y la facilidad de eludirla ó falsearla con la torcida interpretacion á que está sujeta cuasi en totalidad, y que la codicia y mala fe de los propietarios promueve en todos los terrenos. Generalmente se cree que bastaría fijar plazos cortos é improrrogables, y establecer las tasaciones sobre la base de los amillaramientos