

Resolucion gráfica de la ecuacion general del grado m , é instrumento inventado por el Capitan Lill.

I.

En los *Nuevos Anales de Matemáticas* hemos visto una NOTA sumamente curiosa sobre la resolucion gráfica de ecuaciones de un grado cualquiera, y sobre el instrumento que E. Lill, capitan de ingenieros al servicio del Austria, ha presentado en la parte militar de la Exposicion de París.

Hé aqui el principio en que se funda dicho método. Sea la ecuacion general:

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots + g x + k = 0. \dots (1),$$

en la cual, $a, b, c, \dots, g, k$ son coeficientes numéricos positivos ó negativos: se trata de determinar *valores reales* de x (pues sólo á las raices reales se aplica el procedimiento que vamos á exponer), que sustituidos en la ecuacion (1) la satisfagan, es decir, la reduzcan á la identidad $0 = 0$.

Para ello, tomemos desde un punto arbitrario O (fig. 1), sobre una recta, y hácia la izquierda, por ejemplo, una longitud $OA = a$, que para mayor sencillez supondremos igual á 1.

Perpendicularmente á OA , tomemos otra longitud $AB = b$, hácia la izquierda (mirando á la recta AB desde O), si b es del mismo signo que a , y hácia la derecha si es de signo contrario.

Perpendicularmente á AB tomemos $BC = c$, hácia la izquierda (mirando á la recta BC desde A), si c es del mismo signo que b , y hácia la derecha, si es de signo contrario.

Continuando esta misma construccion para los demás coeficientes $d, e, f, \dots, g, k$, llegaremos al fin á un punto K, y habremos formado un contorno poligonal $O A B C \dots G K$, en que el *número* de lados será igual al de coeficientes de la ecuacion (1), es decir, $m + 1$; las *longitudes* de dichos lados serán iguales numéricamente (ó proporcionales) á dichos coeficientes; los *ángulos* del contorno, rectos; y

el sentido en que se cuenten los lados se determinará comparando el signo de cada uno con el del anterior.

Ahora bien:

1.º *Si se puede ir del punto O al punto K, siguiendo OTRO CONTORNO poligonal rectangular $O A' B' C' \dots G'$ de m lados, cuyos vértices consecutivos $A', B', C' \dots$ se apoyen respectivamente sobre los lados $AB, BC, CD \dots$ del CONTORNO PRIMITIVO $AB C \dots K$, la longitud AA' (tomando siempre á a por unidad), ó más en general la relacion $\frac{AA'}{OA}$, será una raiz real de la ecuacion propuesta.*

2.º *A cada CONTORNO RECTANGULAR que pueda trazarse desde O á K por los lados $AB, BC \dots$ corresponderá una raiz.*

3.º *Las raices serán positivas si los puntos $A', A'', A''' \dots$ caen á la derecha de O A, y negativos si estos puntos se hallan á la izquierda, como A'''' , por ejemplo.*

Asi, en la figura 1.ª, que por las dimensiones que hemos dado al contorno corresponde á la ecuacion

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

hay tres contornos posibles, $O A' B' K$, $O A'' B'' K$, $O A''' B''' K$, y á cada uno corresponde una raiz real: $AA' = +1$ para el primero; $AA'' = +2$ para el segundo; $AA''' = +3$ para el tercero.

En resumen, el problema queda reducido á partir desde O, y marchando siempre en ángulo recto, llegar, pasando por los lados $AB, BC \dots$, al último punto K: si A' es tal, que el contorno correspondiente cumple con esta condicion, AA' será una raiz; no lo será en el caso contrario.

Los *Nuevos Anales* no dan la demostracion de esta regla, pero es bien fácil hallarla.

La marcha que seguiremos será la siguiente: 1.º demostraremos la exactitud del teorema para las ecuaciones de segundo grado; y 2.º, probaremos que si es verdadero para la ecuacion del grado m , lo será para la del grado $m + 1$, con lo cual quedará demostrado en general.

I. Sea la ecuacion de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en la que, para fijar las ideas, supondremos

a positivo,

b negativo,

c positivo;

y sea O A B K (fig. 2.^a) el contorno correspondiente: supongamos que A' es un punto elegido de tal modo que O A' K sea recto.

En el triángulo O A A' tendremos

$$A A' = O A \operatorname{tg} A' O A; \quad (2)$$

en el K B A'

$$B K = A' B \operatorname{tg} K A' B = A' B \operatorname{tg} A' O A;$$

de donde

$$A' B = \frac{B K}{\operatorname{tg} A' O A}; \quad (3)$$

pero

$$A B = A A' + A' B,$$

luego sustituyendo los valores (2) y (3)

$$A B = O A \operatorname{tg} A' O A + \frac{B K}{\operatorname{tg} A' O A}.$$

Poniendo

$$O A = a,$$

$$A B = -b,$$

$$B K = c,$$

tendremos

$$-b = a \operatorname{tg} A' O A + \frac{c}{\operatorname{tg} A' O A};$$

de donde se deduce

$$a \left[\operatorname{tg} A' O A \right]^2 + b \left[\operatorname{tg} A' O A \right] + c = 0;$$

lo cual demuestra que $\operatorname{tg} A' O A$ es raíz de la ecuacion dada, puesto que sustituida en vez de x la satisface.

Es claro que si suponemos $O A = 1$ tendremos

$$\operatorname{raiz} = \operatorname{tg} A' O A = A A'.$$

II. Demostremos ahora que si el teorema es cierto para una ecuacion del grado m , lo será para otra del grado $m + 1$.

Sea la ecuacion del grado $m + 1$

$$ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} + \dots + fx^2 + gx + k = 0, \quad (4)$$

y representemos por O A B C..... F G K su contorno, que contendrá $m + 2$ lados.

Supongamos que O A' B' C'..... F' K es otro contorno, cumpliendo con las condiciones ya explicadas, y vamos a demostrar que $\operatorname{tg} A' O A$ (ó A A' si $O A = 1$) es una raíz de la ecuacion (4); es decir, que se tiene, representando para abreviar por x el ángulo A' O A,

$$a \left[\operatorname{tg} x \right]^{m+1} + b \left[\operatorname{tg} x \right]^m + c \left[\operatorname{tg} x \right]^{m-1} + \dots + f \left[\operatorname{tg} x \right]^2 + g \left[\operatorname{tg} x \right] + k = 0.$$

En efecto, podemos considerar á O A B C..... FF', que sólo tiene $m + 1$ lados, como un contorno primitivo de la ecuacion del grado m cuyos coeficientes sean

$$O A, A B, B C, C F \dots FF',$$

es decir,

$$a, b, c, d \dots - FF';$$

de suerte que dicho contorno O A B C.... F F' pertenece á la ecuacion del grado m

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + fx - FF' = 0.$$

Pero esta ecuacion es del grado m y el contorno O A' B' C'..... F' termina en F' luego $\operatorname{tg} A' O A = \operatorname{tg} x$ es raíz de dicha ecuacion, y resultará

$$a \left[\operatorname{tg} x \right]^m + b \left[\operatorname{tg} x \right]^{m-1} + c \left[\operatorname{tg} x \right]^{m-2} + \dots + f \left[\operatorname{tg} x \right] - FF' = 0 \quad (5).$$

Ahora bien,

$$FF' = FG - F'G = -g - F'G,$$

y del triángulo F' G K se deduce

$$GK = F'G \operatorname{tg} KF'G,$$

de donde

$$F'G = \frac{GK}{\operatorname{tg} KF'G};$$

pero la direccion de G K indica que el coeficiente k es positivo, luego

$$GK = k;$$

por otra parte

$$\text{áng.}^\circ KF'G = \text{áng.}^\circ A'OA = x$$

puesto que tienen sus lados paralelos; luego

$$F'G = \frac{k}{\operatorname{tg} x};$$

y por consiguiente

$$FF' = -g - \frac{k}{\operatorname{tg} x}.$$

Sustituyendo este valor de $F F'$ en la ecuacion (5) tendremos

$$a \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^m + b \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^{m-1} + c \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^{m-2} + \dots \\ \dots + f \left[\operatorname{tg} \alpha \right] + g + \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha} = 0,$$

y quitando el denominador,

$$a \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^{m+1} + b \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^m + c \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^{m-1} + \dots \\ \dots + f \left[\operatorname{tg} \alpha \right]^2 + g \left[\operatorname{tg} \alpha \right] + k = 0,$$

que es precisamente lo que nos proponiamos demostrar.

Un método análogo se seguiria si F' cayese á la derecha de G , si g fuere positivo, k negativo, ó si el último lado $G K$ fuese paralelo á $O A$.

II.

Instrumento inventado por el Capitan Lill.

—Se compone de tres partes: una placa fija EE' (véase la fig. 4.^a, que representa las dos proyecciones del mecanismo); otra $e e'$ giratoria sobre la primera; y por último, un cristal mate y trasparente $F F'$ fijo tambien.

El mecanismo da el modo de medir la cantidad angular que la placa $e e'$ gira alrededor de su eje; basta para ello que EE' contenga un círculo graduado y $e e'$ una línea de fe, ó vice-versa.

En la cara superior de la placa giratoria ee' hay trazada una cuadrícula rectangular por paralelas de milímetro en milímetro.

Para resolver una ecuacion dada se comienza por hacer coincidir la línea de fe con el cero del limbo: una de las cuerdas tendrá la direccion $O M$.

Despues se marcan sobre el cristal FF' como sobre una pizarra, los puntos $A, B, C, \dots, K$, de modo que se tenga $O A = a, A B = b, B C = c, \dots$, lo cual es sumamente fácil por la cuadrícula inferior.

Así se traza el contorno $O A B C, \dots, K$ relativo á la ecuacion propuesta.

Hecho esto se afloja el tornillo de presion y se mueve lentamente el círculo $e e'$ hasta que, por primera vez un contorno $O A' B', \dots, K$ (figura 5.^a) se ajuste al $O A B C, \dots, K$: este contorno corresponderá á una raíz, y el valor de esta se obtendrá leyendo el ángulo descrito $M M'$, y determinando su tangente.

Continuando el movimiento de giro hasta completar 180, y leyendo la graduacion cada vez que un contorno de la placa móvil ajuste al $O A B C, \dots, K$ del cristal, obtendremos todas las raíces reales con su signo.

Claro es que estas operaciones exigen algunos tanteos, pero se comprende que no deben ser difíciles.

III.

Sin acudir al mecanismo que acabamos de describir, el teorema fundamental da el medio de obtener gráficamente todas las raíces reales. En efecto, se sabe que si igualamos el primer miembro de una ecuacion á una variable Y , y construimos la curva $C'C$ (fig. 6.^a) que tiene por ecuacion

$$Y = a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots + g x + k$$

las abscisas $x_1, x_2, x_3, \dots$, de los puntos B', A', A, B en que dicha curva corta al eje de las x , serán precisamente los valores de las raíces reales, puesto que para estos valores Y , y por lo tanto $a x^m + b x^{m-1} + \dots + k$, se reduce á cero.

Este procedimiento es sumamente pesado, porque para trazar la curva por puntos hay que sustituir en vez de x la serie de valores suficientemente próximos $O p, O p', O p'', \dots$ y hay que calcular para cada uno el valor correspondiente $m p, m' p', m'' p'', \dots$ de Y , operaciones numéricas largas y enojosas.

Por el contrario, dicho sistema seria muy sencillo si hubiera un medio de obtener el valor de Y correspondiente á otro de x , sin elevar en cada caso, es decir, para cada valor de x , esta última variable á las potencias $m, m-1$, etcetera, multiplicar los resultados por $a, b, c, \dots$ y sumar los productos.

Precisamente el método de Lill dá el medio de ejecutar con suma rapidez esta complicada operacion, puesto que resuelve por medio del contorno fijo el siguiente problema:

Dada una ecuacion algebraica del grado m

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \dots + g x + k = 0,$$

determinar el valor del primer miembro para cualquier valor x , de x .

Sea $O A B C D E K$ (fig. 7.^a), el contorno correspondiente: tomemos (suponiendo $O A = 1$) $A A' = x$, y tracemos el contorno rectangular $O A' B' C' D' E'$: es decir, $A' B'$ perpendicular á $O A'$ hasta que corte á $B C$, $B' C'$ perpendi-

RESOLUCION DE ECUACIONES

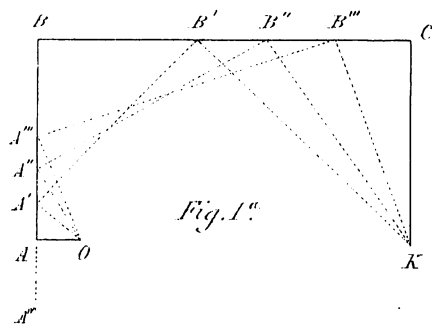


Fig. 1.^a

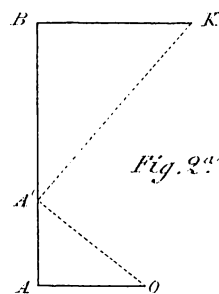


Fig. 2.^a

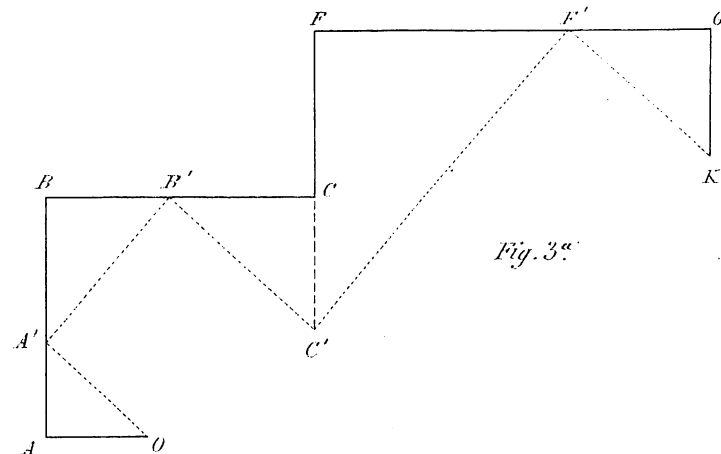


Fig. 3.^a

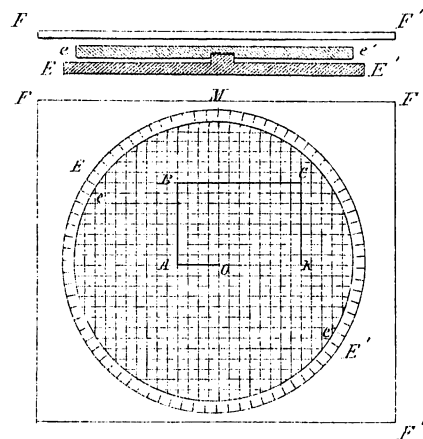


Fig. 4.^a

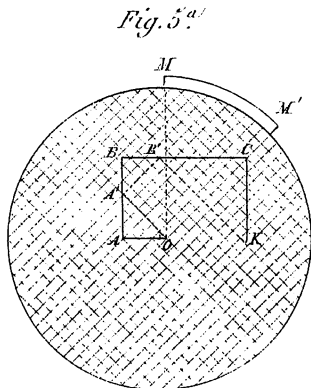


Fig. 5.^a

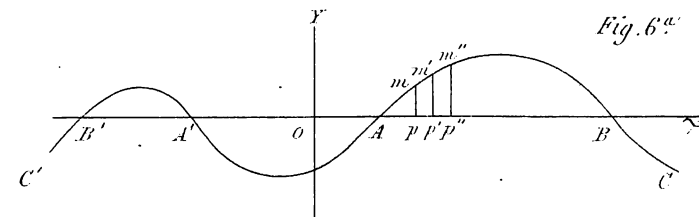


Fig. 6.^a

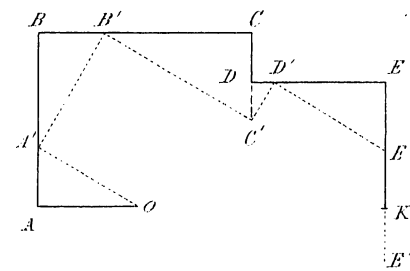


Fig. 7.^a

cular á A' B' hasta que corte á C D, etc., claro es que no siendo x raíz de la ecuacion, sino un valor cualquiera, el punto E' limite de este contorno, ó de otra manera, el en que corte D' E' al lado E K, será distinto del punto K.

Del teorema fundamental se deduce que A A' es raíz de una ecuacion del grado m , cuyo contorno sea O A B C D E E', y los coeficientes

$$a, b, c, \dots, g, E E';$$

luego

$$a x_1^m + b x_1^{m-1} + c x_1^{m-2} + \dots + g x_1 + E E' = 0,$$

de donde

$$a x_1^m + b x_1^{m-1} + \dots + g x_1 = - E E'.$$

Sustituyendo este valor de los m primeros términos en

$$Y_1 = a x_1^m + b x_1^{m-1} + \dots + y x_1 + k,$$

tendremos

$$Y_1 = a x_1^m + b x_1^{m-1} + \dots + g x_1 + k = k - E E' = K E'.$$

Luego el resultado Y_1 , de sustituir un valor x_1 en vez de x en el primer miembro de una ecuacion, es la distancia del último punto del contorno correspondiente á x_1 , al extremo K del contorno fijo.

Basta pues para construir la curva (fig. 6.^a) fijar varios puntos A', A''..... sobre A B, (figura 7.^a); determinar los correspondientes E' E''; y tomar A A', A' A'', A A''..... por abscisas, y K E', K E'', K E''..... por ordenadas: uniendo todos los puntos resultantes, y determinando los de interseccion con el eje de las x , se hallarán las raíces buscadas.

Serán abscisas positivas, por ejemplo, los valores A A'.....; y los contados en la prolongacion de A B corresponderán á abscisas negativas.

Del mismo modo K E'..... serán ordenadas positivas, y negativas las que resulten en prolongacion, como, por ejemplo, K E''.

J. E.

APUNTES SOBRE LA LEY DE AGUAS,

PROMULGADA EN 3 DE AGOSTO DE 1866,

Y ACERCA DE LA REDACCION DE LOS REGLAMENTOS PARA SU CUMPLIMIENTO.

Era grande y apremiante la necesidad de una ley de aguas que arreglase su aprovechamien-

to, que determinase su dominio, que evitára los abusos que se cometian, que señalára claramente á las autoridades sus atribuciones, y á los particulares reglas determinadas para lograr fomentar la gran riqueza que representa este precioso don de la naturaleza, tan indispensable para la vida y para la agricultura, tan ventajoso para el desarrollo de la industria en nuestro accidentado país, y que mal utilizado, abandonado en sus corrientes ó estancado, produce tan funestos resultados para la propiedad, para la agricultura y para la salud pública, como beneficiosos, si se le encauza, conduce y emplea con discernimiento.

Indudablemente que la ley de aguas promulgada en 3 de Agosto de 1866 ha venido á satisfacer esta necesidad. Existian anteriormente Reales decretos y otras disposiciones que, arreglando el aprovechamiento de las aguas en determinados casos, y señalando tambien, aunque vagamente, la policía de los cursos de agua y diferentes reglas para poner en armonía el fomento de la agricultura y la industria con la conveniencia pública y el derecho de propiedad, formaban solo una reunion de disposiciones aisladas que no resolvian bien muchos de los problemas que se presentaban; y no formando un cuerpo de doctrina, motivaban dudas y vacilaciones en las autoridades y en los particulares, en detrimento de los mismos intereses que tenian por objeto desarrollar.

Una ley de esta naturaleza era digna de un estudio concienzudo, tanto más, cuanto que lo que acontecia en España, siendo un reflejo de lo que pasa en países más adelantados, en los cuales no aparece tampoco entre sus leyes más que disposiciones especiales para ciertas cuestiones más ó menos frecuentes, no podia tomarse un tipo fundamental que, basado en la práctica de los hechos, sirviera de punto de partida, para que, acomodando sus disposiciones á las condiciones y circunstancias de nuestro país, prestára una confianza indudable, sancionada por la experiencia y por los buenos resultados de su aplicacion.

Los debates habidos para la formacion de este código de aguas dan una idea de la importancia de la ley, y aun cuando se hallaran despues en sus disposiciones algunos puntos de conveniente modificacion, el paso dado y el gran vacío llenado con ella es un importante servicio prestado al país por nuestros legisladores.

Sin duda alguna que sus numerosos artículos parecerán excesivos tratándose de una ley, tanto más, cuanto que al analizarla se descubren en ella detalles más propios de reglamentos que de principios ó bases fundamentales; más no obstante su extension, son indispensables todavia, para la práctica de sus disposiciones, reglas detalladas que especifiquen el modo y forma de aplicarla á los numerosos y variados casos que en materia tan vasta se presentan, y se aclaren ó interpreten convenientemente algunas prescripciones consignadas en algunos artículos de la ley, no suficientemente explicitos ni terminantes, y que son ya, en el corto plazo transcurrido desde su promulgacion,