

MADRID 15 DE MARZO DE 1866.

TOMO XIV.

NÚM. 6.º

DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN LAS OBRAS DE HIERRO.

(Continuacion.)

Cuchillos empotrados, con brazos en forma triangular.

20. Es fácil deducir, por las explicaciones dadas en los dos párrafos precedentes, los esfuerzos producidos en cuchillos de este género; véanse las Figuras 12 y 13. Cuando están únicamente cargados en su extremidad *c*, las fuerzas desarrolladas en los brazos, son iguales en cantidad en toda su extension, y además equivalentes al peso colocado en el extremo, multiplicado por la relacion de la longitud de los brazos á su altura vertical; y pueden determinarse, por medio de una escala, como se dijo en el párrafo 8. El momento en la division de la cabeza mas larga, próxima á la seccion de empotramiento,

será el mayor, é igual á $P \times \frac{L}{A}$. El momento en la última division junto al peso colocado en *c*, es igual al momento máximo, dividido por el número de divisiones, como ya se ha visto; y los de las demás, empezando desde *c*, son respectivamente dos, tres, cuatro veces, etc., el momento de la última division junto á *c*. Sin embargo, sobre la cabeza mas corta *b d*, tendremos que el momento de la division extrema *c* debe multiplicarse por $1 \frac{1}{2}$; $2 \frac{1}{2}$; $3 \frac{1}{2}$, etc., como ya se ha visto, para obtener los correspondientes á las divisiones sucesivas, á contar desde el extremo *d*.

21. Cuando esta clase de cuchillos, Figs. 12 y 13, están cargados, en cada punto de interseccion de los brazos desde *c* á *a*, los esfuerzos en el par de brazos próximos á *c* son iguales á uno de los pesos, multiplicado por la relacion de su longitud á su altura. El esfuerzo en el segundo par es doble de este valor, por recibir la adición del segundo peso, que se trasmite al punto de empotramiento. El correspondiente al tercer par es triple, y así sucesivamente, desde *c* á la seccion *a b*.

Los momentos producidos en las cabezas por una carga uniforme, se hallan de esta manera:

Supondremos que cada peso actúa separadamente en la interseccion de los brazos, como ya se ha dicho en el último párrafo, desde el punto en que se halla colocado hasta el de empotramiento, y la suma de estos efectos separados dará el efecto total en cada division. Empezando de esta manera por las divisiones extremas en *c* y *d*, tendremos que los momentos

en las demás divisiones del cuchillo mas largo *a c*, serán proporcionales á los números 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc., por la adición sucesiva de los términos de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., y los correspondientes á la cabeza mas corta *b d* serán tambien proporcionales á los números $1 \frac{1}{2}$; 4; $7 \frac{1}{2}$; 12; $17 \frac{1}{2}$; etc., por la adición de los términos de la série $1 \frac{1}{2}$; $2 \frac{1}{2}$; $3 \frac{1}{2}$; $4 \frac{1}{2}$; $5 \frac{1}{2}$, etc. (1). El momento de la division

extrema en *c* es $\frac{p \times L}{A \times N}$, como se ha dicho en el último párrafo, en funcion del peso correspondiente á la

extremidad *c*, del número de divisiones de la cabeza mas larga y de la longitud y altura del cuchillo; y si se multiplica este momento por los números anteriores, se tendrán los correspondientes á las demás divisiones hasta el punto de empotramiento.

Cuchillos continuos.

22. En un cuchillo de esta especie comprendiendo dos claros, como en las Figs. 14 y 15, la porcion próxima al extremo, en la longitud de tres cuartos del claro, se considerará como un cuchillo separado é independiente, con la carga que corresponda á su longitud, calculando en este supuesto los esfuerzos que se produzcan en cada una de sus partes (2).

(1) La série 1, 2, 3, etc., aplicada á la cabeza mas larga, y la $1 \frac{1}{2}$, $2 \frac{1}{2}$, $3 \frac{1}{2}$, etc., á la mas corta, son las distancias horizontales de la extremidad *c*, expresadas en número de divisiones.

(2) Si consideramos en efecto un solo claro, con una extremidad empotrada y apoyada la otra, Fig. 40, y llamamos *p* y *q* la carga uniforme por unidad lineal y la presion ejercida en el punto de apoyo, tendremos que el momento de resistencia, para un punto cualquiera *a*, situado á la distancia *x* del extremo empotrado, será:

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{2} (l - x)^2 - q (l - x) \dots (1),$$

que integrando dos veces, y siendo cero $\frac{dy}{dx}$, cuando *x* lo es, así como *y* en el valor resultante de Σy , cuando *x* = *l*, resultará:

$$\frac{pl}{4} - \frac{pl}{6} + \frac{pl}{24} - \frac{q}{2} + \frac{q}{6} = 0,$$

de donde sale

$$q = \frac{3}{8} pl,$$

El otro cuarto se considerará como una pieza empotrada en el apoyo central, suponiéndola también separada é independiente. Los esfuerzos producidos son los siguientes: la mitad del peso total de la parte supuesta separada, ó el peso de $\frac{3}{8}$ del claro, se toma como colocada en la extremidad *a* de la pieza empotrada, Figs. 14 y 15, y los momentos que se producen se calculan de la manera explicada en el párrafo 20. Además hay los momentos de la carga sobre la misma parte de la pieza, que pueden calcularse por lo dicho en el párrafo precedente, y la suma de estos dos momentos dará el momento total en cada porción de la parte considerada como una pieza empotrada.

Si la distancia de tres cuartos de la luz desde el extremo, cae en un punto intermedio de una división, será lo mejor, para mayor sencillez en el cálculo y seguridad en la construcción, incluir dicha división en las dos partes separadas de que se ha hablado.

El punto *a*, Figs. 14 y 15, en que se suponen unidas las dos partes del cuchillo, se llama ordinariamente punto de inflexión, porque cargado un cuchillo continuo, toma en su parte superior una forma curva, cóncava desde el extremo á este punto, y convexa desde aquí al apoyo central, Fig. 16.

También debe notarse especialmente, que el momento de las fuerzas sobre el apoyo intermedio es extensivo en la cabeza superior, y compresivo en la inferior, entre los puntos de inflexión, Fig. 16, experimentando esfuerzos inversos la parte considerada como pieza empotrada á los de la restante, como se ha visto en el párrafo 18 y Figs. 12 y 13.

Cuchillo continuo cargado desigualmente.

23. Cuando uno de los tramos está mas cargado que el otro, lo que sucede en el caso de un tren al ocupar solamente un tramo durante su paso por un puente, la posición del punto de inflexión se acerca al apoyo central, y debe calcularse la porción inmediata al extremo, como un cuchillo de mayor longitud que los $\frac{3}{4}$ de la luz. La siguiente fórmula dará su longitud en este caso.

Llamemos *p* el peso por unidad del tramo cargado,

valor que, sustituido en la ecuación (1), da

$$\Sigma \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2} (l - x) \left(\frac{l}{4} - x \right),$$

lo que nos dice, que cuando $x = \frac{l}{4}$, el momento es cero; que es el carácter de los puntos de inflexión de la pieza considerada. También puede ser nulo el momento cuando $x = l$, que es precisamente el punto de apoyo. En estas condiciones se puede considerar el cuchillo como formado de dos partes independientes, según se dice en el texto.

p' el del tramo sin carga, y *L* la longitud de un claro; entonces $\frac{7p - p'}{8p'} \times L =$ distancia del extremo al punto de inflexión (1).

(1) Esta expresión de la distancia del punto de inflexión al extremo apoyado no es rigurosamente exacta, por mas que se acerque mucho á la verdad y pueda servir bien en las aplicaciones. En efecto, consideremos un cuchillo apoyado en tres puntos, Fig. 41, llamemos *q*, *Q*, *q'* á las reacciones respectivas en los A, B, C, producidas por la carga de los tramos, y *p*, *p'* el peso por unidad longitudinal que tiene cada uno: si hallamos los momentos de las fuerzas que actúan, con relación á O, distante *x* del apoyo B, y suponemos positivas las que tienden á bajarle y negativas las opuestas, resultará la ecuación

$$\Sigma \frac{d^2y}{dx^2} = pl \left(\frac{l}{2} + x \right) - q(l + x) - Qx + \frac{p'}{2}x^2 + \frac{p'}{2}(l' - x)^2 - q'(l' - x) \dots (1);$$

y tendremos además

$$q + Q + q' = pl + p'l' \dots (2).$$

En este caso, siempre se fija en la práctica el cuchillo en el apoyo intermedio B, por lo tanto, si igualamos la expresión (1) á cero, y sustituimos por *q* y *q'* sus valores $\frac{5}{8}pl$; $\frac{5}{8}p'l'$, según se ha visto en la nota del párrafo

anterior, tendremos por la ecuación (2), $Q = \frac{5}{8}(pl + p'l')$,

y resulta, verificada la sustitución y simplificando,

$$\frac{pl^2}{8} - \frac{5}{4}p'l'x + \frac{p'l'^2}{8} + p'x^2 = 0, \text{ de donde,}$$

$$x = \frac{5}{8}l' \pm \sqrt{\frac{25}{64}l'^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p'}l^2 + l'^2\right)} \dots (3).$$

Este es el valor exacto de la distancia *x*, en función de las longitudes *l* y *l'*, y de las cargas *p* y *p'*. Si suponemos $l = l'$, que es el caso que considera el autor, resultará

$$x = \frac{5}{8}l \pm \sqrt{\frac{25}{64}l^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p'}l^2 + l^2\right)} =$$

$$\frac{5}{8}l \pm \frac{l}{8}\sqrt{17 - 8\frac{p}{p'}} \dots (4),$$

y si se desarrolla en serie el radical, apreciando solo los dos primeros términos, sale

$$x = \frac{p'l + pl}{8p'} = \frac{p' + p}{8p'}l,$$

que es la misma fórmula del texto, solo que se cuenta la distancia desde el apoyo central, en lugar de hacerlo desde el extremo, como allí sucede; y en efecto, restando esta expresión de *l* da la fórmula del autor.

Esta distancia se tomará en la práctica como la longitud de la porción del cuchillo próxima al extremo, calculando su resistencia en este supuesto. Pero la longitud de la porción empotrada deberá estimarse como $\frac{1}{4}$ de la luz, puesto que se verifica cuando ambos tramos están igualmente cargados. En efecto, el punto de inflexión varía con la desigualdad de los pesos, y debe hacerse que ambas partes del cuchillo puedan resistir la máxima variación.

24. En el caso de un cuchillo continuo de tres ó mas tramos cargados uniformemente, se altera la distancia del punto de inflexión en el primer claro, á $\frac{1}{8}$ de la luz, en vez de $\frac{3}{4}$, y en el claro ó claros intermedios la longitud de la porción empotrada aumenta desde $\frac{1}{4}$ ó $\frac{25}{100}$ hasta cerca de $\frac{28}{100}$ de la luz; y la

porción central restante de $\frac{44}{100}$ del tramo, se considerará como un cuchillo en las condiciones arriba descritas. En lo demás los cuchillos se consideran como los de dos tramos, según ya se ha dicho (1).

Por las ecuaciones (3) y (4) se ve que x tiene dos valores, por la ambigüedad del radical; el que corresponde al signo positivo, que se halla cerca del punto de apoyo extremo, y el que pertenece al punto de inflexión, tomando el signo negativo. Para este caso, puede observarse que á medida que p' aumenta con relación á p , el radical aumenta y x disminuye, lo que nos dice que á medida que un tramo está mas cargado con relación al otro, se acerca mas el punto de inflexión del primero al apoyo central; y por el contrario, se separa de este en el tramo menos cargado, como puede observarse por las ecuaciones citadas, cuando p' disminuye con relación á p . Por último, si se hace en la ecuación (3), $l = l'$ y $p = p'$, resulta $x = \frac{1}{4} pl$, como debía suceder.

(1) Consideremos un cuchillo apoyado en cuatro puntos, Fig. 42, advirtiendo que, aunque sea mayor el número de tramos, puede adoptarse un procedimiento análogo al que se va á seguir, para determinar sus condiciones de resistencia y su forma.

Si se llaman q' , q'' , q''' y q^{iv} las reacciones producidas en los puntos de apoyo por el peso de la construcción, y suponemos que los pesos, uniformemente repartidos sobre cada tramo y su luz respectiva, son $p' l'$, $p'' l''$ y $p''' l'''$, tendremos que una parte del primer tramo, que representaremos por $\delta p' l'$, producirá la primera reacción sobre el estribo; la segunda la ocasionará la parte restante del primer tramo, mas la mitad del segundo, por la distribución de la carga y hallarse ambos extremos en igual

condiciones, y tendrá por expresión $\frac{p'' l''}{2} + p' l' - \delta p' l'$; si hubiera mas tramos intermedios sufriría cada apoyo la acción de las dos mitades contiguas; la penúltima reacción estará representada por el peso de la mitad del tramo anterior, mas una parte del último, y en este caso será $\frac{p''' l'''}{2} + p'' l'' - \delta' p'' l''$, llamando $\delta' p'' l''$ la reac-

25. Debe notarse que cuando los últimos brazos que hay, bien sobre los estribos ó sobre las pilas, sufren una tensión, Fig. 15, es indispensable un montante vertical ú otra pieza análoga, que resista bien á la compresión, para transmitir los pesos sostenidos por dichos brazos al punto de apoyo, sea pila ó estribo. En el caso en que no haya mas que dos tramos, Fig. 15, la presión vertical en el extremo está producida por los $\frac{3}{8}$ del peso del tramo, y la correspondiente á la pila central por los $\frac{5}{8}$ del peso de ambos claros, que es equivalente al peso de $1 \frac{1}{4}$ tramo.

ción en el último apoyo. De aquí se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} q' &= \delta p' l'; q'' = \frac{p'' l''}{2} + p' l' - \delta p' l'; \\ q''' &= \frac{p'' l''}{2} + p''' l'' - \delta' p'' l''; q^{iv} = \delta' p''' l''' \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

Para que haya equilibrio entre las fuerzas exteriores, será preciso que sus momentos con relación á un punto cualquiera, tal como el q' , sean iguales á cero, ó bien,

$$\frac{p' l'^2}{2} - q'' l' + p'' l'' \left(\frac{l''}{2} + l' \right) - q''' (l'' + l') + p''' l''' \left(\frac{l''}{2} + l' + l' \right) - q^{iv} (l''' + l'' + l') = 0;$$

sustituyendo en esta ecuación por q' , q'' , etc., sus valores anteriores, y reduciendo sale,

$$\delta' = \frac{1}{2} - \frac{p' l'^2}{2 p'' l''^2} + \delta \frac{p' l'^2}{p''' l'''^2},$$

valor que, sustituido en las ecuaciones (1), las convierte en

$$\left\{ \begin{aligned} q' &= \delta p' l'; q'' = \frac{p'' l''}{2} + p' l' - \delta p' l'; \\ q''' &= \frac{p'' l''}{2} + \frac{p''' l'''}{2} + \frac{p' l'^2}{2 l'''} - \delta \frac{p' l'^2}{l'''}; \\ q^{iv} &= \frac{p''' l'''}{2} - \frac{p' l'^2}{2 l'''} + \delta \frac{p' l'^2}{l'''} \end{aligned} \right\} \dots (2).$$

En todos estos valores entra la incógnita δ , y para determinarla, los sustituiremos en la ecuación general del momento de resistencia de la pieza en un punto cualquiera, el a , por ejemplo, cuya expresión es,

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p' x^2}{2} - q' x + \frac{p' (l' - x)^2}{2} - q'' (l' - x) + p'' l'' \left(\frac{l''}{2} + l' - x \right) - q''' (l'' + l' - x) + p''' l''' \left(\frac{l''}{2} + l' + l' - x \right) - q^{iv} (l''' + l'' + l' - x);$$

verificando la sustitución y simplificando sale,

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = p' x^2 - 2 \delta p' l' x \dots (3);$$

Si se extiende el cuchillo á tres tramos, la presión vertical en los extremos será de $\frac{2}{3}$ del peso de uno solo, y la correspondiente á un apoyo de $\frac{2}{3}$ del peso del primer tramo y la mitad del peso del segundo, formando su total el peso de $1 \frac{1}{3}$ tramo. Por último, cuando el cuchillo salva mas de tres tramos, los estribos y pilas inmediatas están cargados como se ha explicado, con algunas ligeras modificaciones inapreciables en la práctica, y cada pila intermedia sufre el peso de un tramo.

Cuchillos en celosía.

26. Estos cuchillos, que son de una excelente aplicación, consisten en una combinación doble, triple u otro múltiplo cualquiera, del formado por simples triángulos y del que acabamos de tratar. La figura 17 representa una combinación doble del cuchillo de la Fig. 3.^a, y en este caso se calculan los esfuerzos separadamente para cada sistema de brazos

integrando resulta,

$$\Sigma \frac{dy}{dx} = \frac{p' x^3}{3} - \delta p' l' x^2 + C;$$

cuando $x = l'$, $\frac{dy}{dx}$ tiene un valor que llamaremos $tg\alpha$,

por lo tanto,

$$\Sigma \frac{dy}{dx} = \frac{p' x^3}{3} - \delta p' l' x^2 + \frac{p' l'^3}{3} - \delta p' l'^3;$$

integrando otra vez,

$$\Sigma y = \frac{p' x^4}{12} - \frac{\delta p' l' x^3}{3} + \frac{p' l'^3 x}{3} - \delta p' l'^3 x + C';$$

cuando $x = l'$, $y = 0$, de donde se deduce reduciendo,

$$0 = 5 - 16\delta, \text{ ó bien, } \delta = \frac{5}{16};$$

sustituyendo este valor en la ecuación (3) é igualando á cero para tener los puntos de inflexión, resulta, $x = \frac{5}{8} l'$ (a).

Reemplazando el valor hallado de δ en las ecuaciones (2), se convierten en

$$\left. \begin{aligned} q' &= \frac{5}{16} p' l'; q'' = \frac{p'' l''}{2} + \frac{11}{16} p' l'; \\ q''' &= \frac{p'' l''}{2} + \frac{p''' l'''}{2} + \frac{3}{16} \frac{p' l'^2}{l'''}; \\ q^{iv} &= \frac{p''' l'''}{2} - \frac{5}{16} \frac{p' l'^2}{l'''} \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

y se conocen las reacciones sobre todos los apoyos en que descansa el cuchillo.

Si se pone en la ecuación general de los momentos de resistencia de un tramo cualquiera el valor de estas reacciones, se podrán deducir la forma y resistencia del tramo que se considere. En efecto, fijándonos en el segundo, que es el central en el caso de que se trata, y contando las abscisas desde el apoyo q'' , se tendrá que la

en particular, según las reglas ya dadas; siendo los pesos colocados en la intersección de las cabezas con los brazos inclinados la mitad de los correspondientes á un cuchillo de forma triangular, por ser doble el número de puntos cargados. Los esfuerzos que sufren los brazos se hallan separadamente, siendo la mitad de su número de distinta naturaleza que la otra, y la suma de los diversos momentos sobre las porciones de las cabezas horizontales, da el valor total del que actúa sobre estas porciones, como puede verse por la Fig. 17, en que a , b y c representan los esfuerzos producidos en el primer sistema, y d , e y f los del segundo.

Los mismos principios se aplican á una combinación de tres ó mas órdenes de brazos triangulares, disminuyendo el peso en cada punto de intersección de los brazos con las cabezas, en la misma proporción en que aumenten los sistemas de triángulos, suponiendo un peso total dado.

(Se continuará.)

ecuación de los momentos para un punto cualquiera, será:

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = p' l' \left(\frac{l'}{2} + x \right) - q' (l' + x) - q'' x + \frac{p'' x^2}{2} + p'' \frac{(l'' - x)^2}{2} - q''' (l'' - x) + p''' l''' \left(\frac{l'''}{2} + l'' - x \right) - q^{iv} (l''' + l'' - x),$$

y si se sustituyen por q' , q'' , etc., sus valores de la ecuación (4), sale reduciendo,

$$\Sigma \frac{d^2 y}{dx^2} = p'' x^2 - p'' l' x + \frac{5}{8} p' l'^2,$$

de donde igualando á cero para tener el punto de inflexión y despejando, resulta:

$$x = \frac{l'}{2} + \sqrt{\frac{l'^2}{4} - \frac{3}{8} \frac{p' l'^2}{p''}}.$$

Desarrollando el radical en serie, y apreciando los cuatro primeros términos, sale:

$$x = \frac{l'}{2} + \left(0,5 l'' - 0,575 \frac{p' l'^2}{p'' l''} - 0,140 \frac{p'^2 l'^4}{p''^2 l''^3} - 0,11 \frac{p'^3 l'^6}{p''^3 l''^5} \right) \dots (b);$$

reduciéndose esta expresión, cuando los dos primeros tramos tienen la misma luz y carga por unidad de longitud, á

$$x = 0,5 l'' + 0,125 l'' = \left\{ \begin{aligned} 0,575 l'' &= \frac{5}{8} l'' \\ 0,625 l'' &= \frac{5}{8} l'' \end{aligned} \right\} \dots (c).$$

Las distancias expresadas por las ecuaciones (a), (b) y (c), determinan en cada caso la posición de los puntos, en que se verifica la inflexión de los dos primeros tramos; y de una manera análoga se podrían hallar las demás condiciones de forma y resistencia de los demás tramos que haya.

Fig. 9.

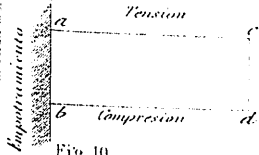


Fig. 10.

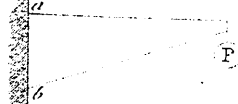


Fig. 11.

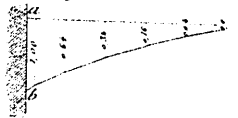


Fig. 12.

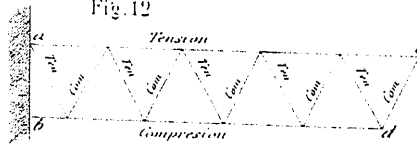


Fig. 13.

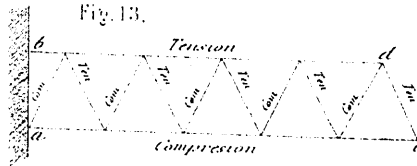


Fig. 14.

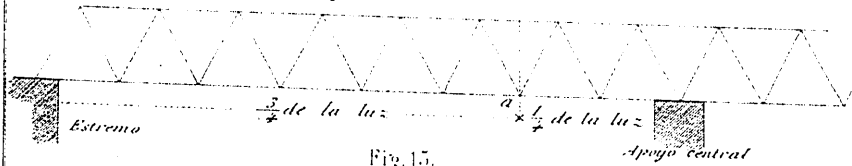


Fig. 15.

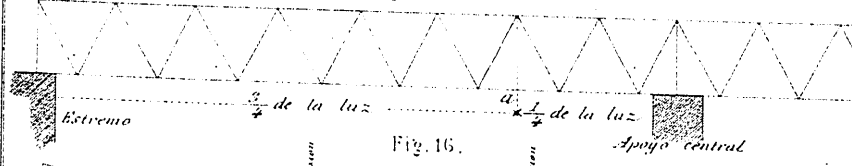


Fig. 16.

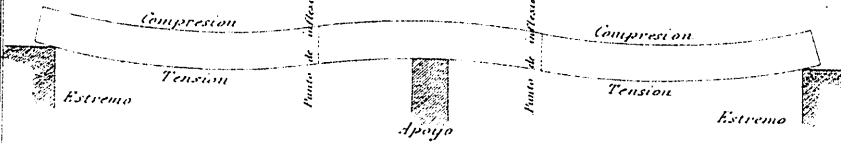


Fig. 17.

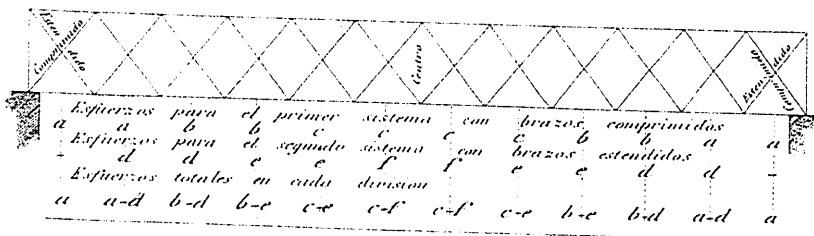


Fig. 18.

