ARCO DE MÁXIMA ESTABILIDAD

Fig.ª 1.ª

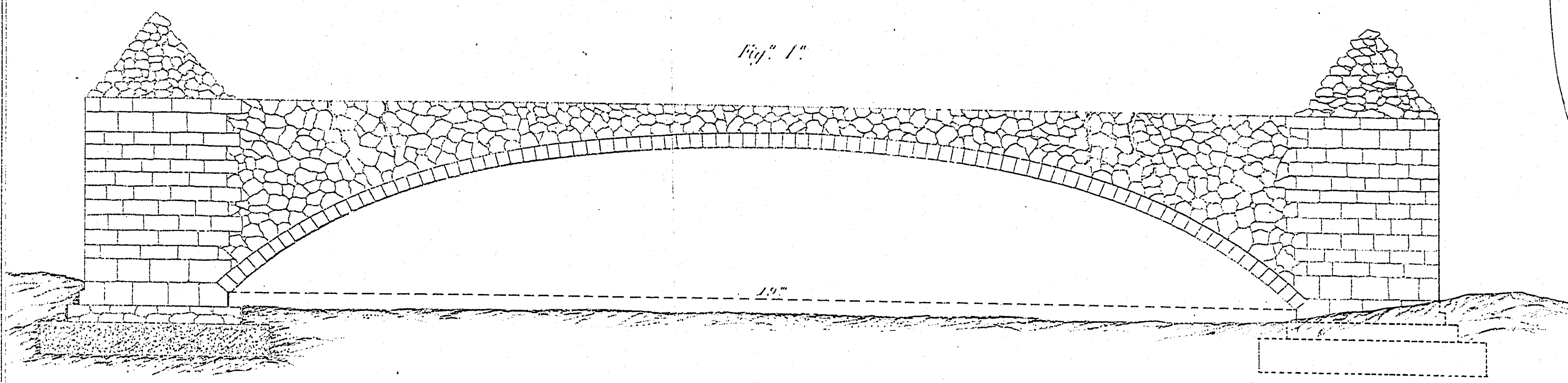
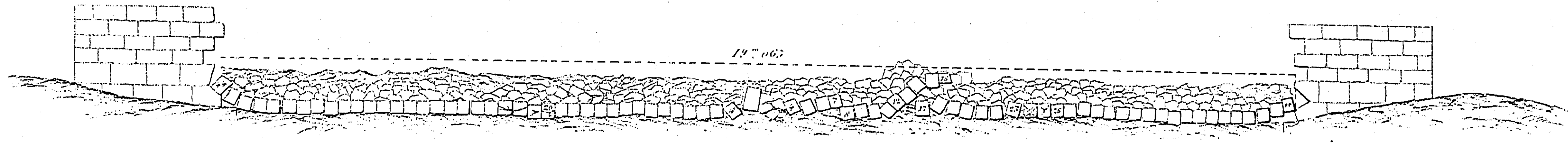


Fig.ª 2.ª



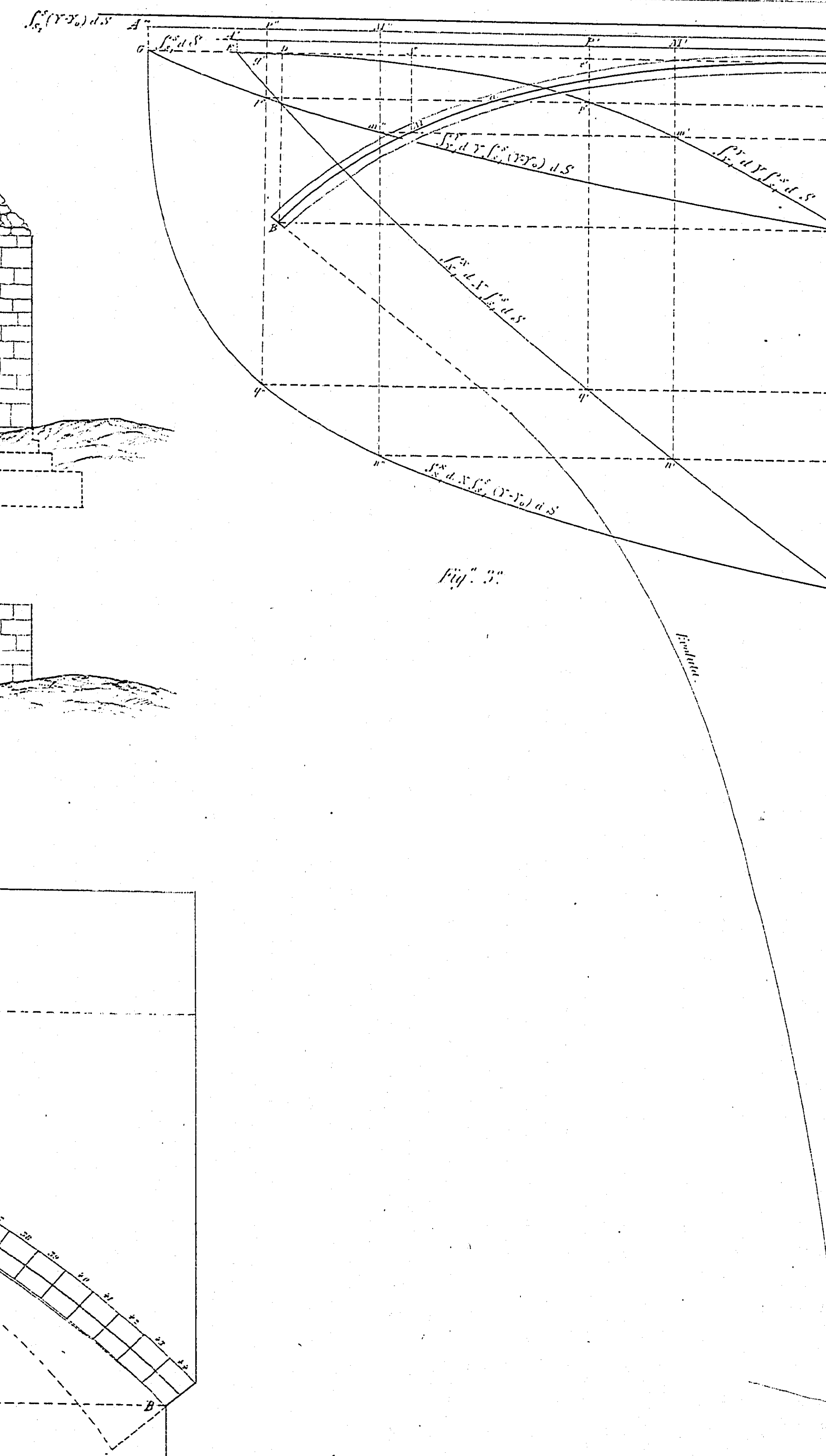


Fig.ª 3.ª

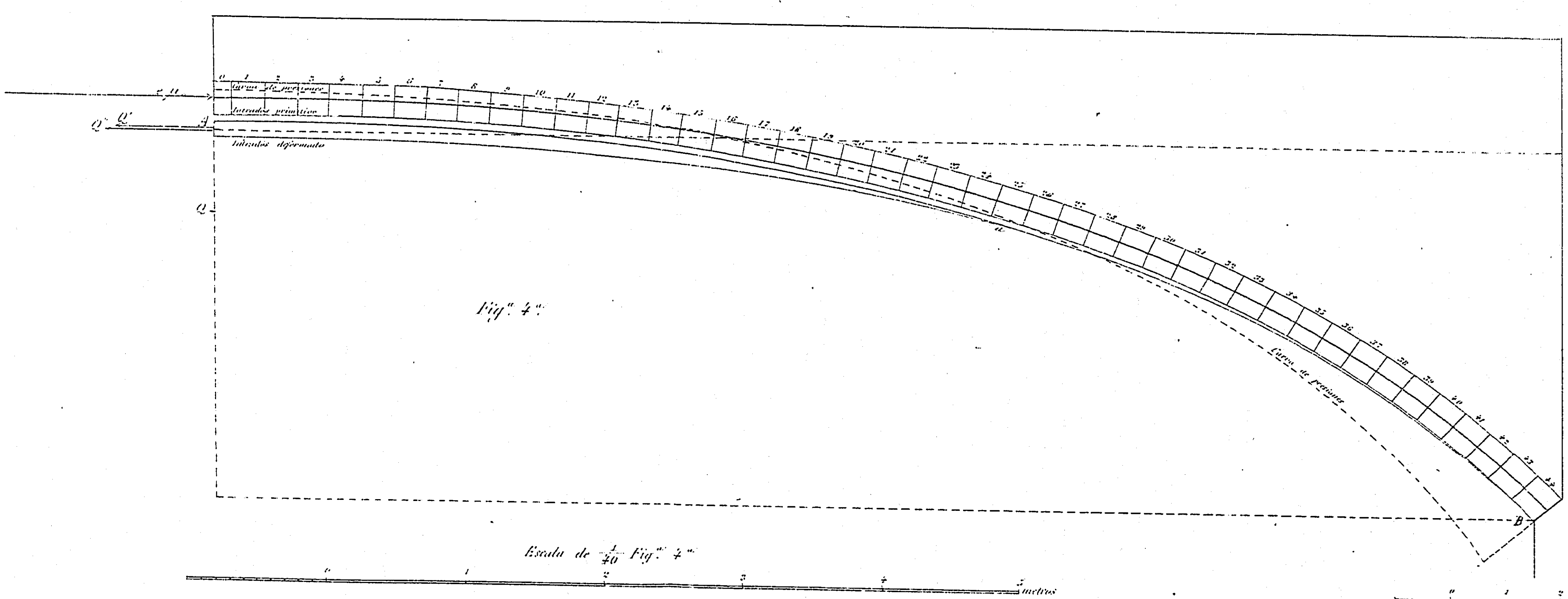


Fig.ª 4.ª

Escala de 1/40 Fig.ª 4.ª

Escala de 1/100 Fig.ª 1.ª 2.ª y 3.ª

Fig. 1.

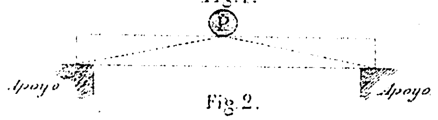


Fig. 2.

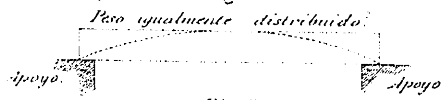


Fig. 3.

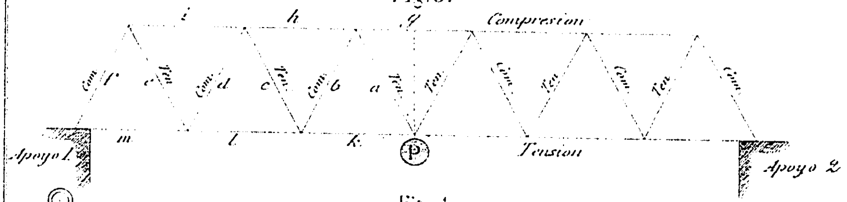


Fig. 4.

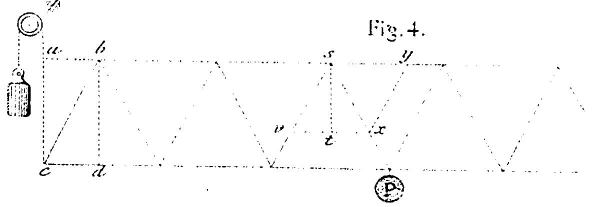


Fig. 5.

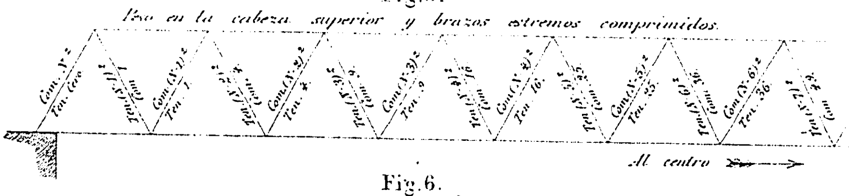


Fig. 6.

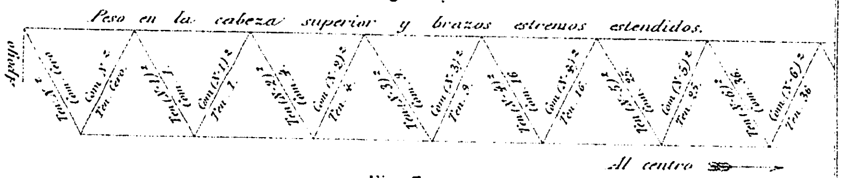


Fig. 7.

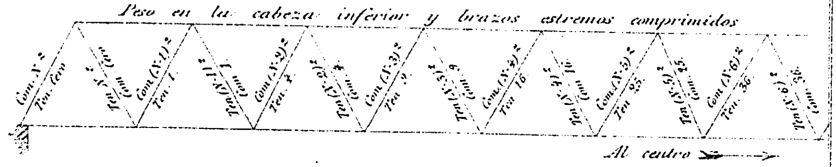
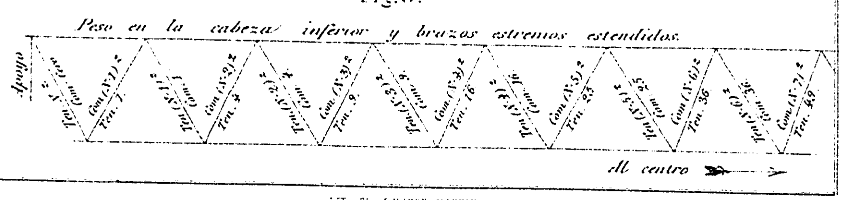


Fig. 8.



LIT. DE J. DONON MADRID

AÑO XIV
DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO IV
DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID 15 DE FEBRERO DE 1866.

TOMO XIV.

NÚM. 4.°

Nuestro amigo el Sr. D. José Antonio Rebolledo, Ingeniero Jefe de segunda clase del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, ha traducido del inglés y anotado la *Memoria* de J. W. Sheilds, miembro del Instituto é Ingeniero civil, sobre las fuerzas que actúan en las obras de hierro, con observaciones prácticas acerca de su construccion: convencidos de la importancia de este trabajo y del servicio prestado á la ciencia de la construccion, tanto por su autor, como por el señor Rebolledo que lo ha traducido y anotado, lo publicamos en las columnas de la REVISTA, seguros de que dicho trabajo será leido con gusto.

DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN LAS OBRAS DE HIERRO.

—

1. Uno de los caractéres distintivos de las ciencias modernas de aplicacion es el empleo preferente del hierro, tanto en las obras del Ingeniero, como en las del Arquitecto. Desde la terminacion del puente de Britannia especialmente, ha recibido su empleo un rápido desarrollo, pudiéndose en la actualidad construir obras, no solo de mayores dimensiones, sino además con mayor economía que antes; por mas que el material sea mas costoso que los otros generalmente usados. Resulta, pues, una aparente anomalía, debida en parte á la fuerza inherente del hierro y á su propiedad especial de poderse adaptar á las formas y dimensiones necesarias, segun varien las condiciones de resistencia en cada una de las partes de la construccion. De esta manera se proporciona la cantidad de material necesaria para cada caso, hallándose todo él empleado convenientemente, y esto da en definitiva una economía en el resultado.

2. Las cualidades esenciales de la persona que proyecte esta clase de obras, son: un profundo conocimiento de los principios científicos acerca de las fuerzas en accion, y suma experiencia en la práctica de la construccion de las obras de hierro. La exposicion de estos principios y su conocimiento es el objeto de este tratado, y entraremos desde luego, aunque brevemente, en la investigacion de las fuerzas que aparecen en las diversas disposiciones generalmente usadas.

3. Consideraremos primero las fuerzas ejercidas en los cuchillos cargados, en que sus diversas partes están sujetas á tensiones ó compresiones, segun su posicion respecto al cuchillo y á la colocacion del peso.

Comencemos por el caso mas sencillo, en que un cuchillo está apoyado en sus estremos y sostiene una carga en el centro, Fig. 1.ª; en este caso se producirán los siguientes esfuerzos.

El peso actúa primero sobre el cuchillo y este le trasmite á los puntos de apoyo. Cada uno de estos, cuando el peso se halla en el centro, sufre una presion vertical igual á su mitad, é imprime, segun la conocida ley mecánica de que la accion es igual y opuesta á la reaccion, al estremo del cuchillo, un esfuerzo vertical de abajo á arriba, igual al trasmitido por él.

Independientemente de estas presiones verticales, existen fuerzas horizontales producidas en la parte central, que actúan á lo largo de los extremos superior é inferior del cuchillo (1).

La tendencia del peso es doblar y romper el cuchillo en el centro, comprimiendo las fibras horizontales en la porcion superior y extendiendo las fibras de la inferior. La intensidad del esfuerzo de compresion superior y de tension inferior son iguales, y considerando como una palanca cada mitad del cuchillo, serán equivalentes á la mitad del peso central, multiplicado por el brazo de palanca de la mitad de la longitud del cuchillo, dividido por su altura. Si P es el peso, L la longitud ó claro y A la altura, el momento de las fuerzas, que se desarrollan en las cabezas superior é inferior, será para el centro del cuchillo,

$$\frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}\frac{L}{A} = \frac{PL}{4A},$$

y cuando tiene una altura uniforme como en la Figura 1.ª, disminuye este momento gradualmente desde el centro á los extremos, en que desaparece (2).

---

(1) Los efectos de estas presiones se neutralizan ordinariamente colocando una cantidad conveniente de meta en forma de reborde plano á lo largo de los extremos, periores é inferiores del cuchillo, á los cuales llamaremos cabezas del mismo.

(2) Sea HB, Fig. 35, la seccion central de la pieza, y $\frac{P}{2}$ la reaccion sobre el apoyo D; como esta reaccion ha de producir una tension en la parte OBED y una compresion en la HOCE, cuyos valores absolutos son iguales, igualemos el momento de las fuerzas que causan la com-

De aquí se deduce que si se disminuye la altura de una manera proporcional, desde el centro á los extremos, como indican las líneas de puntos de la Fig. 1.ª, los momentos que actúan en las cabezas superior é inferior, en el supuesto de un peso central, serian uniformes en toda la longitud del cuchillo.

4. Cuando el peso se halla á distancias desiguales de los puntos de apoyo, la parte sostenida por cada uno de estos está en razon inversa de su distancia al punto de aplicacion del peso. Por lo tanto, si el peso se halla al cuarto de la luz, el apoyo mas distante sostendrá la cuarta parte y el mas próximo tres cuartas partes, y la presion vertical en el cuchillo, á cada lado del peso, estará en la misma proporcion.

El momento correspondiente á la parte superior é inferior, segun se ha dicho en el último párrafo, se halla multiplicando la parte del peso trasmitido á uno de los apoyos, por la distancia de este al peso, y dividiendo el producto por la altura del cuchillo.

5. Cuando un cuchillo, Fig. 2.ª, está cargado uniformemente en toda su longitud, cada apoyo sostiene una parte igual á la mitad del peso total, y su extremo experimenta por la reaccion, segun lo dicho en el párrafo 3, una presion vertical igual y contraria; por lo tanto, si P es el peso total del cuchillo cargado, L su longitud y A su altura, la expresion que ponemos mas abajo, dará el momento para este caso. La presion vertical empieza en el centro y crece de una manera regular hasta los extremos en que es $^1/_2$ P, y el momento correspondiente á las cabezas, en el centro del cuchillo, será igual á $\frac{P \times L}{8\ A}$. Comparando esta expresion con la del párrafo 3, se deduce que un peso distribuido uniformemente, causa la mitad del momento que produciria acumulado en el centro del cuchillo. Cuando la altura de este es uniforme, disminuye el momento desde el centro á los extremos, en que es nulo; pero la ley de la disminucion no es proporcional, como en el caso de un peso colocado en el centro. La relacion del momento en el centro al de cualquier otro punto, es como el cuadrado de la mitad de la longitud del cuchillo, al rectángulo ó producto de los segmentos, en que se halla dividido el mismo, en aquel punto (1). Segun esto, si dividimos el cuchillo en diez partes iguales y llamamos 1 al momento central, los correspondientes á las partes sucesivas, contados desde el mismo punto, serán 0,96; 0,84; 0,64; 0,36 y 0 en el extremo, y si se multiplica por estos números el momento central, se tendrá el correspondiente á estos puntos. De aquí se deduce, que si variamos las alturas en las mismas proporciones indicadas, segun aparece en la línea de trazos de la Fig. 2.ª, tendremos un esfuerzo uniforme en toda la extension de ambas cabezas, en el supuesto de actuar un peso distribuido del mismo modo. Debe observarse tambien, que cuando el peso se extiende solamente sobre una porcion del claro, está sujeto el centro á un aumento de presion vertical, que llega al máximo cuando la parte cargada es la mitad del claro; la presion vertical del centro es entonces igual á un octavo del peso del cuchillo cargado en toda su longitud. Esto se verifica muchas veces en la práctica, como por ejemplo, en el puente de un ferro-carril, que se halla cargado parcial y sucesivamente, durante el paso de los trenes (2).

---

presion con el de la máxima resistencia de la seccion comprimida HO, cuyo punto de aplicacion está en H y cuya intensidad llamaremos x; tomando ambos momentos con relacion á O, tendremos:

$$\frac{P}{4} \times \frac{L}{2} = HO \times x; \text{ ó bien } x = \frac{P}{2} \times \frac{1}{2} \frac{L}{A},$$

siendo A la altura HB de la pieza considerada.

Este valor de x es ciertamente algo mayor que el verdadero, porque en la seccion CH, no solo resiste la fibra situada en H, sino todas las demás, variando su intensidad y su distancia con relacion al punto O, y debiéndose hallar, para obtener un resultado exacto, la integral de todos estos momentos; pero en la práctica se puede admitir el valor espresado de x, por dar mayor resistencia á la construccion. La otra mitad de la reaccion produce la tension de la parte inferior de la figura.

---

(1) Para demostrar lo que dice el autor, llamemos p el peso que carga por unidad de longitud, y L, Fig. 36, la longitud del cuchillo; tendremos, considerando el punto central, que las reacciones sobre los apoyos serán iguales entre sí y tendrán por expresion $p\frac{L}{2}$: el momento para este punto será por lo tanto

$$p\frac{L}{2} \times \frac{L}{2} - p\frac{L}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{p}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \ldots\ldots (1)$$

En el caso de considerar otro punto cualquiera, tal como el a, tendremos que el momento estará espresado por

$$p\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - d\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 = \frac{p}{2}\left(\frac{L^2}{4} - d^2\right)$$

$$= \frac{p}{2}\left(\frac{L}{2} + d\right)\left(\frac{L}{2} - d\right) \ldots\ldots (2)$$

y comparando la expresion (2) con la (1), deduciremos el mismo principio sentado en el texto.

(2) Consideremos en efecto la pieza AB, Fig. 37, cargada uniformemente en la extension DE, y llamemos l su longitud AB; siendo además $2a$=DE, la longitud de la carga igualmente distribuida.

C=centro de la misma carga.

l_1=AC; l_2=CB.

p=peso por unidad de longitud.

x=AF=distancia de un punto cualquiera al origen A.

R=reaccion sobre el apoyo A.

De estos datos deducimos que AD=$l_1 - a$; DF=x—AD $= x - l_1 + a$, siendo por lo tanto la carga en DF =

Cuchillos compuestos.

6. La forma mas sencilla, para el cálculo, que puede tener un cuchillo compuesto, aunque no la mejor en la práctica, es aquella en que ambas cabezas son paralelas y están enlazadas por piezas formando triángulos, como en la Fig. 3.ª Si suponemos cargado un cuchillo de esta naturaleza, bien sea en el centro, ó en cada uno de los puntos de confluencia de las piezas de enlace ó brazos (1), se desarrollarán las fuerzas siguientes:

1.° Una compresion en la cabeza superior.

2.° Una tension en la cabeza inferior.

3.° Esfuerzos verticales alternativos de tension y compresion en los brazos, que trasmiten el peso á los apoyos.

Supongamos primeramente un peso P, Fig. 3.ª, colocado en el centro; en este caso la mitad de él se trasmite por el cuchillo á cada apoyo, y los efectos resultantes son los siguientes.

El peso $^1/_2$ P trasmitido al apoyo 1 actúa sobre las partes inmediatas k y a, y como k es horizontal, y por lo tanto, impropia para sostener un peso vertical, este se hallará sostenido por el brazo a, en el que produce una tension igual á $^1/_2$ P, multiplicada por la relacion entre la longitud del brazo a y su altura vertical Pg (2). La tension en a actúa entonces sobre las partes g y b, á las cuales está unido a, y produce en ellas una compresion. La compresion en la pieza g está equilibrada por otra igual y opuesta, produ-

---

$p\,(x - l_1 + a)$, y en DE$=2pa$. Hallando los momentos de las fuerzas que consideramos, con relacion al punto B de la pieza é igualándolos, tendremos:

$$Rl=2pal_2,\ \text{ó bien},\ R=2pa\frac{l_2}{l}.$$

Observando que el brazo de palanca de la carga comprendida entre D y F es $^1/_2$ DF, hallaremos para el momento de las fuerzas en el punto F,

$$Rx-\frac{p}{2}(x-l_1+a)^2,\ \text{ó bien},\ \frac{2pal_2}{l}x-\frac{p}{2}(x-l_1+a)^2..(1),$$

expresion, que deberemos hacer un máximo. Hallando su coeficiente diferencial é igualmente á cero, tendremos

$$\frac{2pal_2}{l}-p(x-l_1+a)=0$$

y como, $l_1+l_2=l$, tendremos, sustituyendo y despejando,

$$x=a\left(1-\frac{2l_1}{l}\right)+l_1\ldots.(2),$$

de donde sale...$x-l_1=a\left(1-\frac{2l_1}{l}\right)\ldots.(3)$,

expresion que nos da la distancia entre el centro de la parte cargada y el punto en que se verifica el momento máximo.

Si llamamos AD$=y=l_1-a$, tendremos, $a=l_1-y$, y sustituyendo este valor en la ecuacion (3) nos dará

$$x-l_1=(l_1-y)\left(1-\frac{2l_1}{l}\right),$$

cuyo máximo con relacion á y se verifica evidentemente cuando $y=0$, ó lo que es lo mismo, cuando AD es igual á cero, en cuyo caso el extremo de la carga está sobre el apoyo. Esta condicion que podemos expresar por $a=l_1$, sustituida en la ecuacion (3) nos dará

$$x-l_1=l_1\left(1-\frac{2l_1}{l}\right)\ldots..(4);$$

el primer miembro representa una distancia que ya hemos dicho cual es, y para hallar su máximo igualaremos el coeficiente diferencial del segundo á cero, lo que nos dará $1-\frac{4l_1}{l}=0$, de donde $2l_1=\frac{1}{2}\,l$, diciéndonos que en este caso deberá extenderse la carga en la mitad de la longitud de la pieza, como se dice en el texto. Segun las condiciones anteriores, resulta que $a=l_1={}^1/_4\,l$, y sustituyendo estos valores en las ecuaciones (3) y (2), tendremos,

$$x-l_1={}^1/_8 l;\ x={}^3/_8 l,$$

y el momento máximo se convertirá en

$$\frac{9}{128}pl^2=p\,\frac{1}{2}\,l\times\frac{9}{64}l=\frac{9}{64}Pl,$$

llamando P al peso total de la mitad de la pieza considerada con carga.

El momento correspondiente al punto medio de la carga, cuando se extiende desde el extremo de la pieza hasta su punto central, es por la misma ecuacion (1) $\frac{1}{16}pl^2$; por lo tanto, el momento máximo será $\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$, comparado con el correspondiente al centro de la carga, para el caso que se considera.

(1) Un peso distribuido sobre un cuchillo compuesto de cualquiera especie, se supone, para mayor comodidad en el cálculo, como si estuviera reunido en porciones iguales en los puntos de union de los brazos entre sí y con las cabezas.

(2) Si suponemos que MN y OR, Fig. 38, son las cabezas del cuchillo, y representamos por OQ el valor de la mitad de la carga $\frac{P}{2}$, esta se descompondrá en las componentes Om y Or, y haciendo Om=T′, tension que se produce en el brazo OM, tendremos.... T′ : OQ :: OM : ON de donde,

$$T'=OQ\times\frac{OM}{ON}.$$

La componente Or está equilibrada por otra fuerza igual y contraria, produciendo estas diversas componentes una tension en la cabeza inferior.

cida del mismo modo, por la segunda mitad de P, que está referida al apoyo 2; y actuando hácia abajo la compresion en *b* produce una tension en *c* y *k*, estando esta última equilibrada, como en la cabeza superior, por una tension igual y opuesta del otro lado del centro. De la misma manera, la tension en *e*, produce compresion en *i* y en *f*, y últimamente produce una tension en *m* y trasmite el peso $^1/_2$ P al punto de apoyo.

7. En esta disposicion los brazos *a*, *c* y *e* producen una compresion en la cabeza superior, actuando en cada caso, desde el punto de union del brazo con la cabeza al centro del cuchillo en *g*, de tal modo, que la fuerza ó porcion central *g* recibe tres fuerzas distintas de compresion, la segunda pieza *h* dos y la última *i* una. De la misma manera los brazos *b*, *d* y *f*, que producen tension en la cabeza inferior, originan fuerzas distintas como tres, dos y una respectivamente en las piezas *k*, *l* y *m*, y todos estos esfuerzos, tanto extensivos como compresivos, están neutralizados por otros iguales y opuestos del otro lado del centro. Las fuerzas que sufren los brazos en toda figura regular, son iguales y alternativamente de tension y compresion.

8. Si suponemos que la altura vertical del cuchillo se representa por $^1/_2$ P, las longitudes de las piezas horizontales é inclinadas representarian proporcionalmente, los valores de las fuerzas respectivas que sobre ellas actúan, pudiéndose determinar geométricamente estos valores. Supongamos que la Figura 4.ª representa la mitad de la 3.ª, y tomemos $s\,t = {}^1/_2$ P, en una escala cualquiera; tiremos por *t* las paralelas *v x* y *x y*, midiendo entonces con la misma escala *s x*, obtendremos la tension en el brazo *a*, y por la misma descomposicion de las fuerzas *s v* y *s y*, se hallarán las compresiones en el brazo inmediato y en la cabeza superior. Los esfuerzos que sufren las piezas *g*, *h* é *i*, Fig. 3.ª, serán respectivamente, segun se ha visto en el último párrafo, tres, dos y una vez los indicados por *s y* en la Fig. 4.ª

Sin embargo, en la última pieza *m* de la cabeza mas larga, el esfuerzo de tension es la mitad del de las demás piezas. Puede verse esto de una manera palpable, suponiendo que la accion de la fuerza vertical que sufre el punto de apoyo, está reemplazada por un peso equivalente, trasmitido por una polea, como aparece en la Fig. 4.ª; entonces el paralelógramo de las presiones resultantes del esfuerzo en el último brazo, que pone en tension á *c a* y *c d*, está representado por *a b c d*; y el esfuerzo en la última pieza, por *c d* ó mitad del de las otras. Por lo tanto, los términos de la progresion de las fuerzas, en las piezas de la cabeza mas larga, en vez de 1; 2; 3, como se ha dicho antes, serán $^1/_2$; 1 $^1/_2$ y 2 $^1/_2$.

9. Cuando el peso está á distancias desiguales de los puntos de apoyo, las porciones de P, sostenidas por cada uno, están en razon inversa de sus distancias al peso, cuya relacion puede expresarse convenientemente, en funcion del número de piezas ó divisiones horizontales. Así, refiriéndonos á la figura 3.ª, si P se coloca en el extremo inferior de los brazos *c* y *b*, que está á la distancia de dos divisiones del apoyo 1 y cuatro del 2, suponiendo que su número total sea seis, el apoyo 1 sostendrá cuatro sextos y el 2, dos sextos del peso total. Por otra parte, si P está colocado en la parte superior, en la interseccion de los brazos *d* y *c*, hallándose á la distancia de una y media divisiones del apoyo 1, y cuatro y media del 2, el apoyo 1 sostendrá $\frac{4,5}{6}$, ó $\frac{9}{12}$, del peso y el 2, $\frac{3}{12}$. Estas proporciones respectivas del peso se refieren á los apoyos por el cuchillo, y producen ciertos esfuerzos en cada una de sus partes, de la manera descrita en los párrafos 6, 7 y 8, para un peso situado en el centro.

10. Se ha visto por la Fig. 3.ª, que un peso colocado en la parte inferior produce tension en los dos brazos inmediatos, y situado por el contrario en la parte superior, causa compresion en los brazos adjuntos, alternando la naturaleza de las fuerzas en cada caso en los demás brazos, desde el punto en que se halla el peso hasta cada uno de los apoyos.

11. Cuando existen pesos colocados en varios ó en todos los puntos de interseccion de los brazos con las cabezas, cada peso obra separadamente en todo el cuchillo, como se ha dicho en los cinco párrafos precedentes, y la suma de sus efectos aislados será el efecto total en cada parte del cuchillo que se considere. Los pesos colocados en la cabeza superior siempre producen en ella compresion, y en la inferior tension, así es que los esfuerzos, que sufren estas partes son por su naturaleza invariables, y su valor es el que se ha hallado en los párrafos 3 y 5. Los efectos producidos en los brazos son diferentes, variando la naturaleza de las fuerzas del mismo modo que su valor, segun sea la posicion del peso. Por ejemplo, en la Fig. 3.ª, se verá que un peso suspendido en la cabeza inferior produce tension en los dos brazos inmediatos y en cada brazo inclinado en la misma direccion, á partir del peso hasta cada apoyo respectivo, causando compresion en los brazos inclinados en la direccion opuesta. Un poco de atencion hará ver que si los dos puntos próximos al apoyo 1, Fig. 3.ª, se dejan sin carga y se colocan pesos en los otros tres puntos de interseccion de los brazos con la cabeza inferior, solo se producirá en el brazo central *a* un esfuerzo de tension: y por el contrario, si los dos puntos próximos al apoyo 1 son los cargados únicamente, se producirán esfuerzos de compresion en el mismo brazo central. Por lo tanto, en toda construccion de esta naturaleza, sujeta á pesos parciales ó movibles, como sucede, por ejemplo, durante el paso de los trenes por un puente, el brazo *a* deberá ser bastante fuerte para resistir separadamente á los valores de los esfuerzos compresivos y extensivos, y tener siempre la resistencia necesaria en las diversas condiciones de carga á que se halla expuesta la construccion. No obstante, los brazos extremos están sujetos á una clase sola de fuerzas, siendo compresivas, en el caso de las Figs. 3.ª, 5.ª y 7.ª, cuando descansan sobre los puntos de apoyo, y extensivas en el caso de las Figs. 6.ª y 8.ª

La intensidad de la fuerza que experimentan los brazos extremos, cuando el cuchillo está cargado uniformemente, es igual á la mitad de la suma de los pesos ó mitad del peso total, multiplicado por la relacion entre la longitud del brazo inclinado y su altura vertical.

12. Las anteriores observaciones generales harán suficientemente inteligible este punto, y ahora nos proponemos dar las fórmulas necesarias para poder calcular, en los diversos casos que ocurren en la práctica, las fuerzas que actúan en cada una de las partes de las construcciones de esta naturaleza.

13. En el caso de los cuchillos con brazos triangulares cargados en el centro, como en la Fig. 3.ª, el momento de las fuerzas, para ambas cabezas en la division ó par de divisiones centrales, es

$$M = \frac{P}{2}\,\frac{L}{2A},$$

en funcion del peso central, longitud y altura, como ya hemos visto (1). Los momentos en este caso, aumentan de una manera regular y en progresion aritmética, desde la primera pieza cerca del apoyo á la central, siendo los términos de esta progresion 2, 4, 6, 8, etc., para la cabeza mas corta, tal como la superior de la Fig. 3.ª, y 1, 3, 5, 7, etc., para la mas larga, como sucede en la inferior de la misma figura, siendo los términos de esta série equivalentes á los mencionados en el párrafo 8, pero expresados, para mayor claridad, en números enteros.

Por lo tanto, una vez hallado el momento de la parte central $\frac{PL}{4A}$, si llamamos a el término de la progresion anterior, aplicable á la division central, y b el término de la progresion, aplicable á cualquiera otra, el momento en esta estará dado, dividiendo el central por a y multiplicándole por b. En efecto; si el peso central en la Fig. 3.ª es de 12 toneladas, la longitud entre los apoyos de 20 metros y la altura vertical de 2 metros, entonces tendremos que el momento, en la division central, será $\frac{PL}{4A} = \frac{12\times20}{4\times2} = 30$ toneladas.

Los correspondientes á las otras divisiones se calcularán así.

Números proporcionales para las divisiones de la cabeza superior; 2, 4, 6, siendo 6 el número aplicable á la division central.

Id. id. para las divisiones de la cabeza inferior; 1, 3, 5, siendo 5 el número aplicable á la division central.

Momento en la primera division superior.................... $\frac{30}{6}\times 2 = 10$ tons.

Momento en la segunda, id. .... $\frac{30}{6}\times 4 = 20$ tons.

Id. en la tercera ó division central...................... $\frac{30}{6}\times 6 = 30.$

Momento en la primera division inferior.................. $\frac{30}{5}\times 1 = 6.$

Id. en la segunda id........... $\frac{30}{5}\times 3 = 18.$

Id. en la tercera id............. $\frac{30}{5}\times 5 = 30.$

Los esfuerzos que actúan en los brazos son alternativamente de compresion y tension, pero de un valor uniforme é igual á la mitad del peso central P, multiplicado por la relacion que hay entre la longitud del brazo inclinado y su altura vertical, que puede medirse, por una escala dada, en el dibujo del cuchillo, como se ha explicado en el párrafo 8.

14. En el caso de considerar un cuchillo con brazos triangulares, cargado con pesos iguales colocados en ambas cabezas, en todos los puntos de union con estas de los brazos inclinados, los esfuerzos de las diversas partes de la obra son los siguientes.

El momento en la division ó par de divisiones centrales de ambas cabezas, es $\frac{P}{8}\,\frac{L}{A}$, segun ya hemos visto. Para las otras divisiones, tendremos que si N es el número total de las que hay en la parte horizontal mas larga, tal como la cabeza inferior de la Fig. 3.ª, y n el número de órden de una division cualquiera, contada desde el extremo de la cabeza mas larga hácia el centro; siendo $n=1, 2, 3, 4$, etc., en adelante; la espresion $2\,n\,(N + 1 - n) - (N + 1)$ dará una série de números proporcionales al momento de cada division, desde el apoyo al centro. Si en este supuesto, a representa el número hallado para la division central, y b es el correspondiente para cualquiera otra, el momento en esta será igual al central $\frac{P}{8}\,\frac{L}{A}$, dividido por a y multiplicado por b.

La misma regla puede aplicarse para la cabeza mas corta, tal como la superior de la Fig. 3.ª, solo que n estará representado por la série $1\,{}^1/_2$; $2\,{}^1/_2$; $3\,{}^1/_2$; $4\,{}^1/_2$; etc., en adelante, desde el apoyo al centro, estando expresada en números de divisiones la distancia horizontal desde el punto de apoyo.

Por lo tanto, si en el caso representado en la figura 3.ª el cuchillo tiene 20 metros de longitud, 2 de altura y está cargado en cada punto de division con un peso de 8 toneladas, dando un total de 48, el momento en las divisiones centrales g y k será, $\frac{PL}{8A} = \frac{48\times20}{8\times2} = 60$ toneladas.

Los términos correspondientes á los momentos en las porciones de la Fig. 3.ª, hallados por la fórmula

(1) El momento en la division central de la cabeza mas larga es en realidad algo menor que en la central de la mas corta, como se ha explicado en la última parte del párrafo 8; sin embargo, la diferencia es insignificante en la práctica.

$2n(N+1-n)-(N+1)$, en que N es igual á 6, son los siguientes.

Números proporcionales para la cabeza mas larga ó inferior.

Para la primera division,

$$(2\times 1)\times(6+1-1)-(6+1)=5.$$

Para la segunda,

$$(2\times 2)\times(6+1-2)-(6+1)=13.$$

Para la tercera,

$$(2\times 3)\times(6+1-3)-(6+1)=17.$$

Siendo de 60 toneladas el momento en el centro, se deduce de la expresion $\frac{60}{a}\,b$, dada mas arriba, que el

Momento en la primera division junto al apoyo..... $=\frac{60}{17}\times 5=17{,}65$ tons.

Id. en la segunda division.. $=\frac{60}{17}\times 13=45{,}89.$

Id. en la tercera division.... $=\frac{60}{17}\times 17=60{,}00.$

Números proporcionales para la cabeza mas corta ó superior.

Para la primera division,

$$\left(2\times 1\tfrac{1}{2}\right)\times\left(6+1-1\tfrac{1}{2}\right)-(6+1)=9{,}5.$$

Para la segunda,

$$\left(2\times 2\tfrac{1}{2}\right)\times\left(6+1-2\tfrac{1}{2}\right)-(6+1)=15{,}5.$$

Para la tercera,

$$\left(2\times 3\tfrac{1}{2}\right)\times\left(6+1-3\tfrac{1}{2}\right)-(6+1)=17{,}5.$$

Momento en la primera division................. $\frac{60}{17{,}5}\times 9{,}5=32{,}58$ tons

Id. en la segunda.......... $\frac{60}{17{,}5}\times 15{,}5=53{,}16.$

Id. en la tercera.... $\frac{60}{17{,}5}\times 17{,}5=60{,}00$.... (1).

15. Para el caso de un cuchillo de esta misma especie, con brazos triangulares y un peso uniforme, se hallan para los brazos los siguientes esfuerzos.

El esfuerzo en el brazo próximo al apoyo, como ya se ha dicho en el párrafo 11, será ó compresivo, como en la Fig. 4.ª, ó extensivo como en la misma figura, suponiéndola invertida y apoyada en el mismo punto *c*. En ambos casos, como se ha expuesto antes, el esfuerzo que experimente el brazo extremo será igual á la mitad del peso total del cuchillo cargado, multiplicado por la relacion de la longitud del brazo á su altura vertical.

Fácilmente se deduce la naturaleza de los esfuerzos en los demás brazos, teniendo en cuenta la disposicion del cuchillo y la colocacion de la carga. Así, en la Fig. 3.ª, si todos los pesos están en la cabeza superior, el último brazo *f* se halla comprimido; y el brazo inmediato *e* está sujeto á una pequeña compresion, á causa del último peso que se halla en el vértice de *f* y *e*, y que en este caso es un dozavo, el cual se trasmite al apoyo 2, y á una tension por todos los demás pesos: tambien el brazo *d*, que está en mútua conexion con *e*, recibirá tan-

(1) La expresion que presenta el autor para hallar el número proporcional al momento de cada division, no está de acuerdo con lo que ha dicho en el párrafo 5 y con lo expuesto en la nota correspondiente, respecto á la relacion entre el momento en el centro de un cuchillo con el de cualquier otro punto, cuando se halla cargado con pesos distribuidos uniformemente. En el lugar citado se demostró que esta relacion es igual á la que existe entre el cuadrado de la mitad de la longitud del cuchillo y el producto de los segmentos en que se halla dividido, en el punto que se considera.

Si existe un peso constante en cada punto de confluencia de los brazos con la cabeza, y están estos puntos á igual distancia entre sí, como se establece en el texto, es lo mismo que suponer que la carga está distribuida uniformemente, y en este caso se verificará la relacion antes expresada.

Admitiendo los mismos datos que fija el autor, tendremos que para la primera division de la cabeza inferior, la relacion entre los momentos será, llamando M′ al que se busca,

$$\frac{M'}{60}=\frac{5\times 1}{3^2},\ \text{de donde},\ M'=33{,}33,$$

en lugar de 17,65 que aparece en el texto, y lo mismo puede decirse respecto á los demás resultados.

Para obtener el número proporcional buscado, y partiendo de lo dicho en la nota citada, llamemos M al momento en el punto central del cuchillo, y M′ al correspondiente á otro cualquiera que diste *n* del apoyo, siendo N la distancia total del cuchillo, en este caso se tendrá,

$$\frac{M'}{M}=\frac{n(N-n)}{\frac{N^2}{4}},\ \text{de donde},\ M'=M\frac{4n(N-n)}{N^2}.$$

Aplicando esta fórmula á los datos del texto, tendremos los siguientes resultados:

Momento en la primera division inferior junto al apoyo.................... $\frac{60}{36}\,20=33{,}33$

Idem id. en la segunda.............. $\frac{60}{36}\,32=53{,}33$

Idem id. en la tercera.............. $\frac{60}{36}\,36=60{,}00$

Momento en la primera division superior junto al apoyo.................... $\frac{60}{36}\,27=45{,}00$

Idem id. en la segunda.............. $\frac{60}{36}\,35=58{,}33$

Idem id. en la tercera.............. $\frac{60}{36}\,36=60{,}00$

ta compresion como e recibe tension, y tanta tension como compresion experimenta e. Otro tanto sucede con el par de brazos c y b, que semejante y mútuamente sufren esfuerzos de igual valor, pero de opuesto carácter, siendo igual la compresion de c á la tension de b, y la compresion de b á la tension de c, y así sucesivamente en cada par de brazos, hasta el centro del cuchillo. Si todos los pesos están en la cabeza inferior, el último se hallará en el extremo inferior de los brazos e y d, y f no recibirá peso alguno mas que el trasmitido por e, estando e y f igualmente cargados, el primero por tension y el segundo por compresion, y cada uno es igual á la mitad del peso total, multiplicada por la relacion de la longitud del brazo por su altura. Los pares de brazos siguientes, como d y c, b y a, etc., estarán mútuamente sujetos á esfuerzos de igual intensidad, pero de naturaleza contraria, segun se ha dicho anteriormente.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la posicion de la carga y la naturaleza de los esfuerzos resultantes, tendremos una série de números que expresen los esfuerzos proporcionales en cada par de brazos, como ya se ha dicho, en funcion del número de divisiones N, en que supondremos dividida la cabeza mas larga, por las fórmulas siguientes:

	Esfuerzo de compresion ó tension.	Esfuerzo de tension ó compresion.
Para el brazo ó par de brazos, segun el caso, próximos al apoyo	N^2	... cero.
Para el segundo par de brazos..	1	...$(N-1)^2$
Para el tercer par de brazos	$(N-2)^2$...	4
Para el cuarto par............	9	...$(N-3)^2$
Para el quinto par............	$(N-4)^2$...	16
Para el sexto par.............	25	...$(N-5)^2$
Para el sétimo par............	$(N-6)^2$...	36

Y así sucesivamente.

Con objeto de aclarar mas estas expresiones y hacer cómodo su uso en la práctica, hemos puesto las Figs. 5.ª, 6.ª, 7.ª y 8.ª, que manifiestan la distribucion de estos esfuerzos, en los casos que con mas frecuencia se presentan en la práctica.

De esta manera se obtiene una série de números, que representan valores proporcionales á los esfuerzos de cada brazo, en funcion del número de divisiones de la cabeza mas larga. El esfuerzo correspondiente puede hallarse, puesto que en el último brazo es, como ya se ha dicho, igual á la mitad del peso del cuchillo cargado, multiplicada por la relacion de la longitud á la altura del mismo. Por lo tanto, si a es este esfuerzo en el último brazo, b el número proporcional á él y c el correspondiente á cualquiera otro, como ya se ha visto por las fórmulas anteriores, la expresion $\frac{a}{b} \times c$ dará el esfuerzo correspondiente al otro brazo (1).

16. Creemos conveniente volver otra vez á lo indicado en la última parte del párrafo 11, respecto á la necesidad de hacer los brazos susceptibles de resistir separadamente el valor total de los esfuerzos compresivos y extensivos, á que puedan estar expuestos por una carga variable. Si el peso no fuera susceptible de aumento ó disminucion, ó lo que es lo mismo, si se produjeran los esfuerzos por el peso permanente de la construccion sin carga adicional, solo seria necesario proporcionar la resistencia del material de que se halla compuesto el brazo, á la diferencia de los esfuerzos de compresion y extension á que está expuesto. Por lo tanto, si las fórmulas anteriores dan nueve toneladas para la compresion de un brazo y cuatro para la tension en el caso de

(1) Consideremos un cuchillo de la forma indicada, tal como el representado en la Fig. 39, y supongamos que en cada punto de confluencia de los brazos con la cabeza superior, hay un peso que llamaremos 2P. Por lo dicho en el párrafo 8, se descompondrá cada uno de estos pesos en dos, en direccion de los brazos adyacentes, y se trasmitirán por los brazos contiguos hasta los dos apoyos. Observando la figura, se ve que el brazo a recibe la presion de todas las componentes de los pesos que se dirijen al apoyo 1, y cuyo valor estará espresado por NP, siendo N el número de puntos de aplicacion del peso 2P, ó lo que es lo mismo, el número de divisiones de la cabeza mas larga del cuchillo, y tambien se ve que no sufre tension alguna. El brazo b sufre una compresion proveniente del primer peso, cuyo valor es P, y además experimenta una tension por todos los demás que están á su derecha, que estará expresada por (N—1) P. Si se sigue considerando los efectos, tanto de tension como de compresion, que experimentan los demás brazos, tendremos que los números, por que se ha de multiplicar el peso P en cada brazo respectivo para hallar el esfuerzo que resisten, será:

Brazos.	Compresion.	Tension.
a..................	N	cero.
b..................	1	N—1
c..................	N—1	1
d..................	2	N—2
e..................	N—2	2
f..................	3	N—3
g..................	N—3	3
h..................	4	N—4
i..................	N—4	4
j..................	N	cero.

Cuando los pesos están colocados en la cabeza inferior ó el cuchillo se halla invertido, se pueden igualmente aplicar los resultados anteriores, teniendo presente las fuerzas que actúan en cada brazo.

no haber carga variable, bastará dar una resistencia de cinco toneladas para la compresion. Sin embargo, solamente en las grandes construcciones puede apreciarse en la práctica la distincion entre ambos casos, y estos efectos jamás se perciben en los últimos brazos, que son los que reciben mayor esfuerzo, estando sujetos únicamente á los de una sola naturaleza.

17. Puede observarse por la Fig. 3.ª, que si el peso está colocado en la cabeza superior, hay seis puntos cargados, y solamente cinco poniéndolos en la inferior. La diferencia en tal caso es poco importante en la práctica, y el peso total del cuchillo cargado puede incluirse en la suma de los pesos, sean cinco ó seis, en cuyo caso cada peso de los cinco puntos cargados será algo mayor que el correspondiente á cualquiera de los seis, puesto que la carga total será la misma.

Cuchillos empotrados.

18. Los esfuerzos que se desarrollan en un cuchillo cargado, de esta naturaleza, son semejantes á los de la Fig. 1.ª, solo que están invertidos, sufriendo tension la cabeza superior y compresion la inferior. Es evidente que, suponiendo un peso colocado en c, Fig. 9.ª, el cual produce una flexion ó descenso en el estremo $c\ d$, se ocasiona un esfuerzo compresivo en cierta zona de d á b, y otro extensivo de c á a. Estando producidos los momentos correspondientes por el peso colocado en el estremo, son iguales á él, multiplicado por el brazo de palanca, ó sea la relacion de la longitud á la altura del cuchillo, y cuando esta es uniforme, como en la Fig. 9.ª, empieza en el extremo $c\ d$ y aumenta regularmente hasta la seccion de empotramiento $a\ b$, en que es igual á $P \times \frac{L}{A}$, conservando las mismas notaciones que anteriormente. Tambien hay una presion vertical igual á P en el punto b, con una reaccion igual en el cuchillo, segun se ha dicho en el párrafo 3 con referencia á una pieza apoyada.

De lo expuesto se deduce, que si en un cuchillo empotrado, y con un peso en su extremo, va aumentando proporcionalmente la altura, como en la Fig. 10, los momentos en ambas cabezas serán uniformes en toda su longitud.

19. En el caso de una pieza empotrada, con pesos distribuidos uniformemente, el momento que se produce en la seccion de empotramiento es, por una ley conocida de la mecánica, igual al causado por el mismo peso colocado en la mitad de su longitud. Por lo tanto, el momento máximo en ambas cabezas, que, como hemos visto mas arriba, se verifica en los puntos a y b, Fig. 9.ª, es igual á $P \times \frac{1}{2} \frac{L}{A}$ ó $\frac{1}{2} P \frac{L}{A}$, siendo el momento en $a\ b$ igual al que produciria la mitad del peso distribuido si se le colocara en la extremidad cd. Suponiendo la altura uniforme, la relacion del aumento del momento desde el extremo á la seccion empotrada no es regular, como en el caso de un cuchillo cargado en su extremidad; pero es proporcional al cuadrado de las distancias desde el mismo punto. En este supuesto, tendremos, que si se divide en cinco partes iguales un cuchillo de esta naturaleza, y el momento en la seccion de empotramiento se hace igual á 1, los correspondientes á los otros puntos serán respectivamente, 0,64; 0,36; 0,16; 0,04 y 0,00 en el estremo (1), y si se multiplica por estos números el momento en la seccion de empotramiento, dará el correspondiente á cada uno de estos puntos.

De aquí se deduce, que si se disminuye la altura en esta proporcion, desde la seccion de empotramiento al extremo, como en la Fig. 11, los momentos en ambas cabezas serán iguales en toda su longitud, para el caso de tener un peso distribuido uniformemente.

La presion vertical en el punto b es equivalente al peso total P, produciendo una presion igual en la parte $a\ b$; y esta disminuye de una manera regular desde dicha seccion al extremo $c\ d$ en que desaparece.

(*Se continuará.*)

BÓVEDAS DE LADRILLO.

En el número de los *Nouvelles annales de la construction*, correspondiente á Noviembre último, se inserta un artículo del ingeniero Mr. Fontaine sobre las esperiencias hechas para estudiar la estabilidad de las bóvedas de ladrillo. En ella se espresa que todas las teorías sobre este punto suponen apoyos fijos, materiales incompresibles y dovelas justapuestas sin intermedio de mortero, y no pueden tener aplicacion conveniente sino en tanto que se cumplen con estas circunstancias.

Con el auxilio de las curvas de presion y aplicando el principio de la menor resistencia, pueden averiguarse exactamente las reacciones producidas en el interior de una bóveda, y los puntos de aplicacion de la resultante de estas reacciones. Pero siendo desconocida la ley de la reparticion de las presiones en las juntas, resulta el problema indeterminado, á no suponer que las presiones elementales en la proximidad de la resultante sean proporcionales á las ordenadas de un trapecio, lo cual no es exacto sino entre ciertos límites; pero como principio general supone que los sólidos no tienen cohesion molecular. Tambien presentan las consideraciones teóricas mucha incertidumbre cuando los estribos son vigas metálicas flexibles, y los materiales están unidos entre sí, constituyendo la bóveda un monolito.

(1) Estos números son proporcionales á la série de los cuadrados aplicables en este caso, esto es, 25, 16, 9, 4, 1 y 0,00 en el extremo.