AÑO XIV
DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO IV
DE LA SEGUNDA SÉRIE.

MADRID 1.° DE DICIEMBRE DE 1866.

TOMO XIV.

NÚM. 23.

PUENTES COLGADOS.

TEORÍA DE LOS TIRANTES SUPERIORES AL TABLERO.

Uno de los medios que con mas éxito se ha empleado para disminuir la movilidad de los puentes colgados es la colocacion de tirantes superiores al tablero, indispensables, por otra parte, cuando los apoyos intermedios no son fijos.

El objeto que en este artículo me propongo es indicar ligeramente las consideraciones teóricas que conducen á la determinacion del peso que á estos tirantes debe darse, para que reduzcan la amplitud de las oscilaciones del puente, debidas al paso de una sobrecarga, á ciertos y determinados límites.

Considero en el problema general dos casos principales:

1.°, que el puente tenga dos tramos; 2.°, que conste de un número mayor.

Cada uno de ellos los subdivido en otros dos: 1.°, que los apoyos intermedios sean movibles; 2.°, que sean fijos.

Primer caso. Un puente de dos tramos con el apoyo intermedio móvil. (Fig. 1.ª)

Sean AA'CC' y CC'EE' los dos tramos, que supongo de iguales dimensiones, ABC y CDE los cables, AB'C y CD'E los tirantes, CC' el apoyo intermedio, formado de una biela que puede girar al rededor de su punto inferior, y á cuyo extremo superior se unen los cables y tirantes de los tramos.

Llamo 2 H á la luz de cada uno de los tramos, f á la flecha comun de los cables, f^1 á la de los tirantes, p al peso por unidad de longitud que permanentemente carga sobre el puente, p' á la suma del anterior y de una sobre-carga repartida uniformemente sobre el tablero de uno de los tramos, π al peso por unidad de longitud de los tirantes, Q y Q' á los empujes de los cables y tirantes debidos al peso p, Q_1 al empuje de uno de los cables producido por la fuerza p', suponiendo que su luz y flecha son 2 H y f, a á la altura de la biela y P á la parte del peso total de la construccion que carga en su extremo C, cuando se supone que sobre uno de los tramos obra la fuerza p'.

Supongo que en el tramo AA'CC', y en un momento dado, se hace actuar una sobre-carga, y que en este instante, y por un medio cualquiera, se fija la posicion de la biela, la cual será vertical mientras que sobre el puente solo cargue la fuerza p, puesto que todo es simétrico con relacion á ella. El primer efecto de la fuerza p' será producir un alargamiento en el cable; pero como este aumento es muy pequeño, se desprecia para simplificar los cálculos, despues, elevará el valor del empuje desde Q, que corresponde al peso p, hasta Q_1 lo que hará que el empuje total del tramo AA'CC', $Q_1 + Q'$, sea mayor que el de CC'EE', $Q + Q'$. Si se suelta la biela CC', esta se encontrará solicitada, en la direccion CA, por una fuerza igual á $Q_1 - Q$, que la hará girar al rededor del punto C' en el sentido CA. A medida que el punto C se mueva, los cables ABC y AB'C disminuirán de luz y aumentarán de flecha y lo contrario sucede en el tramo CC'EE'; pero como los empujes son proporcionales á los cuadrados de las luces é inversamente proporcionales á las flechas, estas fuerzas crecerán en los cables CDE y CD'E y decrecerán en ABC y AB'C.

Continuando el movimiento de la biela CC' llegará un instante en que los empujes de los dos tramos serán iguales; pero, á pesar de esta igualdad, la biela seguirá su marcha porque en su extremo C actúa la fuerza P que desde que el apoyo intermedio perdió su verticalidad, añadió su efecto al de la diferencia de los empujes para hacerla girar al rededor del punto C'. De aquí en adelante, el empuje total del tramo CC'EE' irá excediendo cada vez más al del tramo AA'CC', dando lugar á una fuerza en el sentido CE que tiende á contrarrestar la accion del peso P: el sistema quedará en equilibrio cuando la resultante de ámbas fuerzas pase por el punto C' y su direccion se confunda con la de la biela; cuya condicion se expresa analíticamente, estableciendo que la suma de sus momentos con relacion al extremo inferior de CC' es nulo.

Voy á establecer esta ecuacion y á deducir por medio de ella la posicion final de la biela, la cual indica la movilidad del puente.

Sea (Fig. 2.ª), C'C'' la biela en su posicion de equilibrio. Las fuerzas que obran sobre el sistema y cuyos momentos con relacion á C' se deben determinar, son: en *el sentido* CA; 1.°, el empuje del cable C''B'', cuyo valor es $Q_1 - \Delta Q_1$, representando por $-\Delta Q_1$ la variacion negativa que ha experimentado Q_1 por el aumento de flecha y disminucion de luz del cable C'' B''; 2.°, el empuje del tirante C''' B''', $Q' - \Delta Q'$, dando á $-\Delta Q'$ la misma interpretacion que anteriormente: *en la direccion opuesta;* 1.°, el empuje del cable C''D'', $Q + \Delta Q$; 2.° el del tirante C''D_1'', $Q' + \Delta Q'$; y 3.° y último, el peso $P = (p + p' + 2\pi)$.

El brazo de palanca de los empujes será a, aproximadamente, puesto que el ángulo de la biela, en su posicion de equilibrio, con la vertical es siempre pequeño; el del peso P es C''M, que llamaré α, y que es igual al aumento ó disminucion que en sus luces han experimentado los tramos AA'CC' y CC'EE'.

La ecuacion de los momentos será pues:

$$(1)\quad \Big[(Q+\Delta Q)+(Q'+\Delta Q')-(Q_1-\Delta Q_1)-(Q'-\Delta Q')\Big]\alpha-\Big[p+p^1+2\pi\Big]\alpha=o,$$

en la que voy á sustituir en vez de los empujes y de sus incrementos sus valores en funcion de los datos.

El empuje del cable CD tiene por valor $Q=\frac{P\,H^2}{2f}$, (*Saavedra.—Puentes colgados*); para determinar ΔQ doy á H y á f incrementos pequeños y simultáneos, que llamo α y φ respectivamente, y, si se tiene en cuenta que p H es constante y se desprecian cantidades pequeñas con relacion á α y φ, se tendrá:

$$\Delta Q=\frac{P\,H^2}{2f}\left(\frac{\alpha}{H}+\frac{\varphi}{f}\right);$$

pero como, en general, $\frac{\alpha}{H}$ es muy pequeña con relacion á $\frac{\varphi}{f}$, se tiene:

$$(2)\qquad \Delta Q=\frac{p\,H^2}{2f^2}\varphi.$$

En efecto α y φ han de satisfacer á la diferencial, respecto á H y f, de la ecuacion $L'=H+\frac{2}{3}\frac{f^2}{H}$ puesto que la longitud del cable es constante. Diferenciando con relacion á estas variables y sustituyendo por δ H y δf, α y $-\varphi$ resulta $\alpha=\frac{4}{3}\frac{f\,H}{H^2-\frac{2}{3}f^2}\varphi$, ó bien $\frac{\frac{\alpha}{H}}{\frac{\varphi}{f}}=\frac{4}{3}\frac{\frac{f^2}{H^2}}{1-\frac{2}{3}\frac{f^2}{H^2}}$, donde se vé que en efecto la relacion $\frac{\frac{\alpha}{H}}{\frac{\varphi}{f}}$ es del órden $\frac{f^2}{H^2}$, es decir, muy pequeña de segundo órden.

En la espresion (2) entra la cantidad φ, que se debe determinar por la condicion de que el cable A B C sin variar de longitud, pueda adquirir una luz $H-\alpha$ y una flecha $f+\varphi$.

Las fórmulas que dan las longitudes de los cables C D E, F (1), y C'' D'' E, F (2), son: $L'=H+\frac{2}{3}\frac{f^2}{H}$ y $L'=H+\alpha+\frac{2}{3}\frac{(f-\alpha)^2}{H+\alpha}$ las que deben ser idénticas, segun lo dicho anteriormente. Igualando estas espresiones se deduce para φ_1 — si se desprecian cantidades pequeñas con relacion á este incremento —, el siguiente valor:

$$\varphi=\frac{3}{4}\frac{H}{f}\alpha-\frac{f}{2H}\alpha;$$

que equivale á diferenciar la ecuacion $L'=H+\frac{2}{3}\frac{f^2}{H}$ con relacion á las variables H y f.

Pero si se observa que $\frac{\alpha f}{2H}$ es muy pequeña con relacion al primer término, se tendrá:

$$(3)\qquad \varphi=\frac{3}{4}\frac{H}{f}\alpha;$$

cuyo valor sustituido en la fórmula (2) dá:

$$\Delta Q=\frac{3}{8}\frac{p\,H^3}{f^3}\alpha.$$

De una manera análoga se deducen:

$$Q_1=\frac{p'\,H^2}{2f},\qquad \Delta Q_1=\frac{3}{8}\frac{p'\,H^3}{f^3}\alpha,\qquad (a)$$

$$Q^1=\frac{\pi\,H^2}{2f^1},\qquad \Delta Q^1=\frac{3}{8}\pi\frac{H^3}{f'^3}\alpha.\qquad (b)$$

Si se sustituyen estos valores en la ecuacion (1), se tiene:

$$a\left[\left(\frac{p\,H^2}{2f}+\frac{3}{8}\frac{p\,H^3}{f^3}\alpha\right)+\left(\frac{\pi\,H^2}{2f'}+\frac{3}{8}\pi\frac{H^3}{f'^3}\alpha\right)-\left(\frac{p'\,H^2}{2f}-\frac{3}{8}\frac{p'\,H^3}{f^3}\alpha\right)-\left(\frac{\pi\,H^2}{2f'}-\frac{3}{8}\frac{\pi\,H^3}{f'^3}\alpha\right)\right]$$
$$=(p'+p+2\pi)\,\alpha \quad \text{ó}$$

$$(4)\quad \frac{p\,H^2}{2f}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f^2}\alpha\right)+\frac{3}{4}\frac{\pi\,H^3}{f'^3}\alpha-\frac{p'\,H^2}{2f}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f^2}\alpha\right)=(p'+p+2\pi)\,\frac{\alpha}{a}.$$

De esta ecuacion resulta:

$$(5)\quad \alpha=\frac{H^2}{2f}\,\frac{p^1-p}{(p+p')\left(\frac{3}{4}\frac{H^3}{2f^3}-\frac{1}{a}\right)+2\pi\left(\frac{3}{4}\frac{H^3}{2f'^3}-\frac{1}{a}\right)},$$

y si se sustituye este valor en la ecuacion (3) se saca para la variacion de flecha de los cables A B C y C D E,

$$(c)\quad \varphi=\frac{3}{4}\frac{H^3}{2f^2}\,\frac{p^1-p}{(p+p')\left(\frac{3}{4}\frac{H^3}{2f^3}-\frac{1}{a}\right)+2\pi\left(\frac{3}{4}\frac{H^3}{2f'^3}-\frac{1}{a}\right)}.$$

En la fórmula anterior se puede dar á π, peso de los tirantes por unidad de longitud, un valor tal que el correspondiente de φ no exceda de una cantidad dada, y por lo tanto, que la variacion total de flecha de los cables al ser cruzado el puente por una sobre-carga uniformemente repartida sobre el tablero, cuyo valor es sensiblemente igual á φ no pase de cierto límite: basta para ello sustituir en el primer miembro en vez de φ su valor y despejar π.

De una manera análoga á como se ha encontrado φ, se puede hallar φ', que dá por medio de la fórmula (*b*) el valor de $Q'+\Delta Q'$ y de esta es fácil deducir, á su vez, la tension de los tirantes, con cuyo valor se comprueba si los cables que los forman pueden soportar aquellas fuerzas; aumentando su peso si son demasiado débiles para resistirlas.

Segundo caso. Un puente de dos tramos con el apoyo intermedio fijo.

Sea (Fig. 3.ª) A A' E E' el puente que se considera y cuyo apoyo intermedio C C' se supone fijo. Se conservan en este caso cuantas denominaciones se han establecido en el anterior, y además se designan por T y T' las tensiones del cable A B C y del tirante A B' C y por T_1 y T_1' las fuerzas análogas en el cable C D E y en el tirante C D' E, despues de haber sido cargado el primer tramo con el peso p^1; por R la resultante de las dos primeras fuerzas; por R^1 la de las dos segundas; por r el coeficiente de rozamiento de las materias que forman el cable y el apoyo; y finalmente, por el γ ángulo A B C (Fig. 4.ª)

Estudiemos el efecto que en los cables y tirantes del puente produce la fuerza p^1. Al obrar este peso sobre el tramo A A' C C' producirá un aumento de tension en el cable A B C, cuya fuerza siendo menor que la correspondiente al C D E, le arrastrará tras de sí haciendo que parte de su longitud pase al primer tramo; pero como el tirante C D' E se encuentra unido invariablemente al cable C D E, seguirá su movimiento, viniendo á aumentar la longitud del tirante situado en el tramo A A' C C' á expensas de la suya.

El aumento de longitud del cable y del tirante del primer tramo producirá otros en sus flechas respectivas, y, por lo tanto, una disminucion en sus tensiones; efectos completamente contrarios tienen lugar en el segundo tramo; el movimiento de los cables y tirantes continuará hasta que la resultante de las tensiones á la izquierda de la pila C C' combinándose con el rozamiento producido en C, sea igual á la resultante de las tensiones á la derecha del apoyo intermedio.

Esta condicion se expresa analíticamente de la manera siguiente (*Saavedra.—Puentes colgados*):

$$(6)\quad R^1=R\,e^{-r\gamma}.$$

La componente horizontal de la tension T_1, ó sea el empuje horizontal del cable C D_1 E, es igual á $Q+\Delta Q$,—representando por ΔQ el incremento de Q por efecto de la disminucion de flecha del cable C D E_2,— su componente vertical será $(Q+\Delta Q)$ tang. E C T_1, F (3). De la misma manera se deduce para las componentes de las fuerzas T_1', $Q+\Delta Q'$ y $(Q'+\Delta Q')$ tang. $T_1{}^1$ C E; el valor de R' será:

$$(7)\quad R'=\sqrt{(Q+\Delta Q+Q'+\Delta Q')^2+\left((Q+\Delta Q)\text{ tang. E C }T_1+(Q'+\Delta Q')\text{ tang. }T_1{}^1\text{ C E}\right)^2}.$$

El valor de R tiene una forma semejante á la anterior, que es fácil deducir despues de lo expuesto. Sustituyendo ámbas expresiones en la ecuacion (6), se obtiene:

$$(8)\quad \sqrt{(Q_1-\Delta Q_1+Q'-\Delta Q')^2+\left((Q_1-\Delta Q_1)\text{ tang. Á C T}+(Q'-\Delta Q')\text{ tang A C T'}\right)^2}\times e^{-r\gamma}=$$
$$\sqrt{(Q+\Delta Q+Q'+\Delta Q')^2+\left((Q+\Delta Q)\text{ tang. E C }T_1+(Q'+\Delta Q')\text{ tang. A C }T_1{}^1\right)^2}$$

El empuje Q_1 está dado por la fórmula $Q_1=\dfrac{p'\,H^2}{2f}$, como se deduce en el caso anterior, ΔQ_1 se calcula por medio de la expresion $\Delta\,Q_1 = \dfrac{p'\,H^2}{2\,f^2}$, φ, en la que φ se encuentra buscando el incremento de la flecha producido por un aumento en la longitud del cable A B C.

Si en la fórmula $L' = H + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{f^2}{H}$ se dá á L' y á f incrementos simultáneos y pequeños, que llamaré $+\beta$ y φ, se tendrá:

$$L' + \beta = H + \frac{2}{3}\,\frac{(f+\varphi)^2}{H};$$

restando estas ecuaciones y despreciando cantidades pequeñas con relacion á φ, se deduce:

$$(9) \qquad \varphi = \frac{3}{4}\,\frac{H}{f}\,\beta,$$

cuyo valor sustituido en el de $\Delta\,Q_1$, le trasforma en:

$$(10) \qquad \Delta\,Q_1 = \frac{3}{4}\,\frac{p'\,H^3}{2\,f^3}\,\beta.$$

De una manera análoga se encuentra:

$$(11) \qquad Q = \frac{p\,H^2}{2\,f} \qquad \text{y} \qquad \Delta\,Q = \frac{3}{4}\,\frac{p\,H^3}{2\,f^3}\,\beta,$$

$$(12) \qquad Q' = \frac{\pi\,H^2}{2\,f'} \qquad \text{y} \qquad \Delta\,Q' = \frac{3}{4}\,\frac{\pi\,H^3}{2\,f'^3}\,\beta.$$

El valor del coeficiente angular de la tangente en el punto A al cable A B C es $\dfrac{2\,f}{H}$; el valor de tang. A C T será igual á la expresion anterior aumentada de $\dfrac{2\,\varphi}{H}$, de donde:

$$\text{tang. A C T} = \frac{2\,(f+\varphi)}{H},$$

sustituyendo en vez de φ su valor encontrado anteriormente, se tiene:

$$(13) \qquad \text{tang. A C T} = \frac{2\,(4\,f^2 + 3\,H\,\beta)}{4\,H\,f}.$$

Por el mismo procedimiento se obtiene:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\text{tang. A C T}' = \frac{2\,(4\,f'^2 + 3\,H\,\beta)}{4\,H\,f'}, \\ &\text{tang. E C T}_1 = \frac{2\,(4\,f^2 - 3\,H\,\beta)}{4\,H\,f} \ \text{y} \\ &\text{tang. E C T}_1{}' = \frac{2\,(4\,f'^2 - 3\,H\,\beta)}{4\,H\,f'}. \end{aligned} \right.$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuacion (8), y sustituyendo en vez de las cantidades que en ellos entran los valores que se acaban de deducir, se tiene:

$$(14) \qquad \left[\frac{H^2}{f^2}\left(\frac{p'}{f} + \frac{\pi}{f'}\right)^2 + \frac{H^2}{4}\left(\pi + p'\right)^2 - \frac{3}{8}\,H^3\left(\frac{p'}{f^3} + \frac{\pi}{f'^3}\right)\left(\frac{\pi}{f'} + \frac{p'}{f}\right)\beta\right] e^{-2\,r\,\gamma} =$$
$$\frac{H^2}{f^2}\left(\frac{p}{f} + \frac{\pi}{f'}\right)^2 + \frac{H^2}{4}\left(\pi + p\right)^2 + \frac{3}{8}\,H^3\left(\frac{p}{f^3} + \frac{\pi}{f'^3}\right)\left(\frac{\pi}{f'} + \frac{p}{f}\right)\beta.$$

De esta ecuacion se deduce:

$$(15) \qquad \beta = \frac{\left[\dfrac{H^2}{f^2}\left(\dfrac{p'}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right)^2 + \left(p' + \pi\right)^2\right] e^{-2\,r\,\gamma} - \left[\dfrac{H^2}{f^2}\left(\dfrac{p}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right)^2 + \left(p + \pi\right)^2\right]}{\dfrac{3}{2}\,H^3\left[\left(\dfrac{p'}{f^3} + \dfrac{\pi}{f'^3}\right)\left(\dfrac{p'}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right) e^{-2\,r\,\gamma} + \left(\dfrac{p}{f^3} + \dfrac{\pi}{f'^3}\right)\left(\dfrac{\pi}{f'} + \dfrac{p}{f}\right)\right]}$$

cuyo valor sustituido en el de φ dá:

$$(16) \qquad \varphi = \frac{\dfrac{1}{2\,f}\left[\dfrac{H^2}{f^2}\left(\left(\dfrac{p'}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right)^2 + \left(p' + \pi\right)^2\right] e^{-2\,r\,\gamma} - \left[\dfrac{H^2}{f^2}\left(\dfrac{p}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right) + \left(p + \pi\right)^2\right)\right]}{H^2\left[\left(\dfrac{p'}{f^3} + \dfrac{\pi}{f'^3}\right)\left(\dfrac{p'}{f} + \dfrac{\pi}{f'}\right) e^{-2\,r\,\gamma} + \left(\dfrac{p}{f^3} + \dfrac{\pi}{f'^3}\right)\left(\dfrac{\pi}{f'} + \dfrac{p}{f}\right)\right]}.$$

De esta fórmula se puede hacer un uso análogo al indicado en el caso anterior para la expresion (*c*).

Tercer caso. Un puente de tres tramos con los apoyos intermedios movibles.

Sea (Fig. 5.ª) A B H G un puente de tres claros, en el que se conservan las mismas denominaciones que en los casos anteriores, y A B C D el tramo que recibe la fuerza p' cuyo efecto, en las diversas partes de la obra, se desea estudiar.

Si se fija la biela E F en el instante en que obra la fuerza p^1, es evidente que su efecto sobre los tramos A B C D y C D E F será igual al que se explicó en el primer caso; pero si al llegar la biela C D á su posicion de equilibrio se deja libre la biela E F, como los empujes del cable C F' E y del tirante C E' E, son ahora mayores que las fuerzas homólogas en el tercer tramo, se verificará sobre E F un efecto análogo al experimentado por C D; pero el movimiento de este apoyo intermedio destruyendo el reposo de la biela C D, á causa de que disminuyen los empujes del segundo tramo, hará que continúe su interrumpida marcha y el equilibrio del cónjuto no se volverá á restablecer hasta que en ámbas la suma de los momentos de las fuerzas que sobre ellas obran, con relacion al punto de giro, no sean nulas.

Esta condicion dá lugar á dos ecuaciones análogas á la (1) modificada, teniendo en cuenta que la disminucion de luz del segundo tramo, es igual á C C' — E E' ó sea á $\alpha - \alpha'$, llamando $\alpha' = $ E E'.

$$\text{Biela CD: } \frac{p\,H^2}{2f}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f^2}(\alpha-\alpha')\right)+\frac{\pi\,H^2}{2f'}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f'^2}(\alpha-\alpha')\right)-\frac{p'\,H^2}{2f}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}\alpha\right)-$$
$$\frac{\pi\,H^2}{2f'}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}\alpha\right)=(p'+p+2\pi)\frac{\alpha}{a} \qquad \text{ó}$$
$$\frac{p\,H^2}{2f}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H^2}{f^2}(\alpha-\alpha')\right)+\frac{3}{4}\frac{\pi\,H^3}{f'^3}\alpha-\frac{3}{8}\frac{\pi\,H^3}{f'^3}\alpha'-\frac{p'\,H^2}{2f}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}\alpha\right)=(p'+p+2\pi)\frac{\alpha}{a},$$
$$\text{biela EF: } \frac{p\,H^2}{2f}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f^2}\alpha'\right)+\frac{\pi\,H^2}{2f'}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f'^2}\alpha'\right)-\frac{p'\,H^2}{2f}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}(\alpha-\alpha')\right)-$$
$$\frac{\pi\,H^2}{2f'}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}(\alpha-\alpha')\right)=(p'+p+2\pi)\frac{\alpha'}{a} \qquad \text{ó}$$
$$\frac{p\,H^2}{2f}\left(1+\frac{3}{4}\frac{H}{f}\alpha'\right)+\frac{3}{4}\frac{\pi\,H^3}{f'^3}\alpha+\frac{3}{8}\pi\frac{H^3}{f'^3}\alpha'-\frac{p'\,H^2}{2f}\left(1-\frac{3}{4}\frac{H}{f'}\alpha\right)=(p+p'+2\pi)\frac{\alpha'}{a}.$$

De ámbas ecuaciones que se han de verificar al mismo tiempo, se deducen los valores de α y α' y, por lo tanto, el de $\alpha - \alpha'$, por medio de los cuales se conocen los incrementos sufridos por las flechas de los cables y tirantes en funcion de π. Conocidas estas cantidades se puede calcular el peso π para que el incremento de la flecha del tramo cargado, que es el mayor, por ser igual á la suma de los otros dos, no exceda de límites dados.

Tambien se pueden hallar las tensiones de los tirantes, como se indicó en el primer caso, y calcular si sus dimensiones son suficientes para soportar esta fuerza.

La marcha seguida en este caso indica el camino que se debe llevar cuando el número de claros exceda de tres, ó la sobre-carga repose sobre tramo distinto del primero, ú obre en màs de uno.

Cuarto caso. Un puente de tres tramos con los apoyos intermedios fijos.

Efectos completamente semejantes á los estudiados anteriormente producirá una sobre-carga en un puente de esta clase, y su accion se calcula de una manera análoga, sustituyendo á las variaciones de luz las sufridas en las longitudes de los cables. El equilibrio no se restablecerá hasta que para cada una de las pilas no se verifique la condicion que expresa la ecuacion (6).

Establecidas estas ecuaciones se deducen de ellas el aumento de longitud del cable y del tirante del primer tramo, si este es el cargado, y, por lo tanto, las variaciones de las flechas en funcion de π; cuyas fórmulas resuelven completamente el problema como se ha indicado detalladamente en los casos anteriores.

NOTA.

La fórmula (5) sólo difiere de la dada por el Sr. de Saavedra en su excelente obra sobre puentes colgados (párrafo 79) por la sustitucion en el denominador de f'^3 en vez de $f'^2\,(f' - b'\,\alpha)$ (salva una equivocacion de signo); cuyo término considera el Sr. de Saavedra como el más importante de los que forman el citado denominador.

Esta diferencia procede, á mi entender, de haber considerado el Sr. de Saavedra que la letra f tenia la misma significacion en las dos fórmulas que dan los valores de L', lo cual no es cierto para el cable y *mucho ménos para el tirante.*

Debe además notarse:

1.° Que aunque b y b_1 (párrafo 79) sean muy pequeñas, esto no legitima el no haberlas diferenciado.

2.° Que el igualar los dos valores de L' es, á mi juicio, un rodeo inútil y que deberia conducir á un valor indeterminado si se hubieran completado las operaciones.

3.° Que el valor de la cantidad representada por b', y que segun se deduce de la citada obra se debe calcular por la misma fórmula que dá b y b_1, está dada por una expresion *algo* distinta de aquella fórmula.

Y 4.° y último. La principal equivocacion en que reposa el artificio que el Sr. de Saavedra emplea para calcular el valor de φ, consiste, á mi entender, en suponer constante la cantidad L' cuando dicha longitud *es necesariamente una funcion de* H *y de f.*

E. E.

BIBLIOGRAFÍA.

Ensayo sobre el orígen, espíritu y progresos de la legislacion de las aguas,

por

EL EXCMO. SR. D. CIRILO FRANQUET Y BELTRAN,

Jefe superior de Administracion civil.

(Conclusion.)

Muestra el Sr. Franquet tanta aficion á cuanto tiene relacion con los aprovechamientos de aguas, que tambien se apercibe y reseña la legislacion y principios hidronómicos que rigieron en Tortosa antes y despues de la reconquista. No podia menos de ser así, si se considera cuán fértil y cuán productiva era la vega de Tortosa, pueblo situado á la márgen izquierda del caudaloso Ebro.

En el siglo XII, ya el conde Berenguer IV dió á los habitantes de su nuevo reino una carta-puebla que se podia considerar como el pacto social escrito entre el rey y sus vasallos, prefijando en ella los derechos y obligaciones civiles y políticas.

Se quiso con tal documento significar cuánta importancia se daba á la repoblacion de Tortosa, que formó un marquesado independiente con leyes especiales; pero que en 1365 se incorporó á Cataluña. Conservó Tortosa su independencia civil, y el rey D. Jaime I aprobó aquella independencia y ordenó que se rigieran por sus usos consuetudinarios.

Ningun punto de comparacion se encuentra entre el desarrollo que obtuvo la agricultura en Valencia con el de la Vega de Tortosa. En aquel reino se abrieron multitud de acequias, mas en la vega de Tortosa solo se utilizaban las aguas que se estraian con la noria, tal y conforme aun hoy dia se conserva aquel artefacto. Algo sin embargo se halla en el código de Tortosa que dice relacion á la clasificacion de las aguas y sobre los derechos y servidumbres de los ribereños.

En la costumbre 8.ª se declaraba del dominio público los puertos y playas de la mar y los arenales, así como del uso comunal los rios, ramblas y las aguas y balsas que no se hallasen en terrenos particulares, puesto que aquellas lo eran de los dueños de los prédios segun la costumbre 3.ª Otra declaracion hay en la costumbre 8.ª sobre el dominio público de las riberas de los rios. La costumbre 4.ª espresaba que tenia derecho el público en los rios á lavar ropas, blanquearlas y enjugarlas, sacar arenas y gravas, depositar maderas y estiércoles y apagar cal; pero todo sin causar daño á los transeuntes. Los ribereños, segun la costumbre 1.ª, disfrutaban del derecho de aluvion y de accesion segun su frontera; podian construir azudes y malecones para defender sus heredades, sin causar daño á los barcos y maderas que se conducian por el rio. Vése, pues, en aquella localidad puesto en práctica el derecho de estraer del rio los ribereños el agua necesaria para los riegos de sus heredades por medio de norias, sin mas limitacion que la de no oponer obstáculo á la navegacion.

Los derechos de aluvion y de accesion los declaraba, segun ya se ha dicho de los dueños de los campos fronterizos, porque siendo los aumentos paulatinos, nadie podia conocer de dónde venian y á quién pertenecian. Tambien se encuentra en la obra que analizamos perfectamente estractada la legislacion que hace relacion á la pertenencia de las islas formadas en los rios, que lo eran por mitad de los dueños de ambas riberas, segun su frontera. Rige aun hoy dia en Tortosa la práctica de que el dueño de una isla hace suyas todas las accesiones, aterramientos y aumentos de territorio que tenga la isla, aunque esceda los límites de su primitiva heredad.

Algun vacío se encuentra en la legislacion de Tortosa en cuanto á las servidumbres de aguas, efecto sin duda de que los riegos, como

PUENTES COLGADOS

Fig.ª 1.

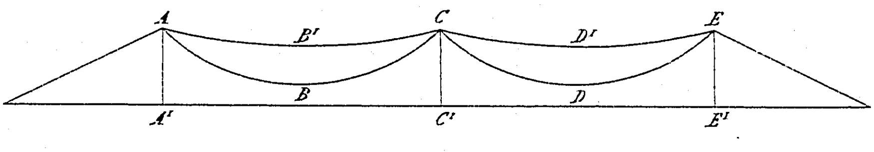


Fig.ª 2.

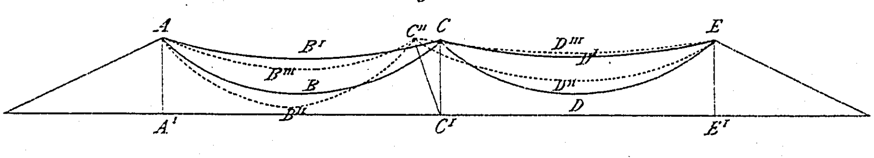


Fig.ª 3.

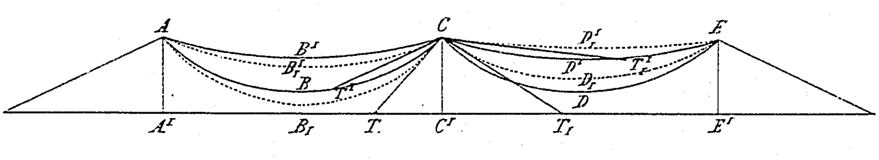


Fig.ª 5.

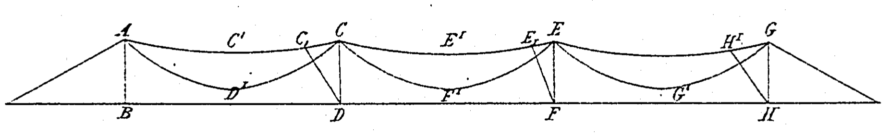
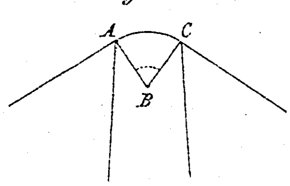


Fig.ª 4.



LIT. J. DONON, MADRID