

exteriores del tablero dos filas de cargos escrupulosamente medidos con el cajon métrico al tiempo de colocarlos, y cuyo peso se habia hallado el dia anterior por medio de operaciones minuciosamente practicadas, con el objeto de conocer de antemano el número de cargos que habia de colocarse sobre el tablero. La carga de prueba empezó á repartirse por cuatro cuadrillas, dos de las cuales avanzaban del centro á los extremos, y cada una de las otras dos de los extremos al centro, los observadores de las orillas anotaron las alturas de mira, tanto al principio de la operacion, como en varios periodos subsiguientes de ella, siendo el resultado que, al llegar á completar la tercera parte de la carga de prueba, la flexion del punto medio fué de nueve centímetros aguas arriba y ocho aguas abajo; pero es de advertir que en este momento la temperatura, que tanto en los dias anteriores como al empezar la carga, era bastante templada, comenzó á enfriarse por causa de la lluvia que hacia un rato estaba cayendo; no pudiendo ménos de originarse con este descenso de temperatura un movimiento de contraccion, cuyos efectos habian de ser más sensibles en la parte curva superior de los cuchillos que en la horizontal inferior del tirante, por ser aquella de mayor longitud que este; movimiento de contraccion que, obligando á bajar los montantes verticales del cuchillo, pudo producir parte de la flexion observada, como podrá verse por los fenómenos que despues se notaron con las variaciones de temperatura. Al llegar á la mitad de la carga, que correspondia á dos filas completas de cargos de piedra, que ocupaban en su totalidad las dos zonas exteriores del tablero, la flecha observada aguas arriba como aguas abajo fué de trece centímetros, debiendo tambien manifestarse que seguia lloviendo. Al mismo tiempo que el resultado de la mira, se observó tambien que el tablero, en el lado de los rodillos, se separó de su posicion inicial dos centímetros, debido á la contraccion del metal. Continuada la operacion, se terminó con la colocacion de la total carga en las dos zonas centrales del tablero, que quedó de esta manera cubierto de cuatro filas longitudinales de cargos de piedra, que en junto componian el peso total de la carga de prueba. Las flechas observadas, que parecia natural, debieran haberse aumentado bastante al

empezar esta nueva carga en el centro, solo experimentaron un aumento de dos centímetros, descendiendo despues progresivamente hasta ser de nueve centímetros la flecha observada al final de la operacion, tanto en el lado de aguas arriba como en el de aguas abajo. Ya á este tiempo la lluvia habia cesado, y el sol calentaba notablemente las planchas del puente, coincidiendo, como se vé, la disminucion de la flecha con el aumento de la temperatura, y corroborándose de esta manera el efecto notado al observar las primeras flechas. Durante la operacion se registraron repetidas veces los estridos, sin que en ellos se observara grieta, señal ni circunstancia alguna que atestiguara los esfuerzos que estaba sufriendo.

Concluida la carga, se dejó que gravitara sobre el puente con arreglo á condiciones; por la tarde sobrevinieron fuertes aguaceros, que á no dudar, debieron aumentar el peso de la carga, sin que esta circunstancia influyera en los resultados observados.

Al siguiente dia se empezó á hacer la descarga, procediendo á quitar las dos filas centrales desde los extremos al centro, en medio de una aglomeracion de 60 obreros que producian una gran trepidacion en el tablero al arrastrar los carretillos. Las flechas fueron disminuyendo en uno y dos centímetros concluida la media descarga, y al terminar toda ella disminuyó 5 centímetros, debido naturalmente al encaje que habian hecho todas las piezas del sistema.

Con lo que vá relacionado se dió por terminada la prueba, y de ella se extendió el acta correspondiente, que fué elevada á la Superioridad. Pocos dias despues el Excmo. Sr. Arzobispo de la Diócesis, en presencia de todas las autoridades, y en medio de un gentio inmenso, bendecia solemnemente el puente, imprimiendo de este modo el sacrosanto sello de la Religion cristiana á esta grandiosa obra, que desde aquel momento el Sr. Gobernador de la provincia, en nombre de S. M., declaró abierta al tránsito público, precipitándose en seguida millares de personas, que representaban una carga dinámica bastante más considerable que la de la prueba oficial.

C. C.

Equilibrio de un sólido empotrado en sus extremidades y cargado de n pesos.

MEMORIA DEL INGENIERO CIPOLETTI.

(Conclusion.)

OBSERVACIONES.

- I. Se obtiene una comprobacion de la exactitud de los cálculos en que las ecuaciones relativas á las diversas partes de la curva elástica son independientes de la longitud de sólido empotrado á la derecha.

II. De las fórmulas (6), (7), (8) y (9) se deduce que, al crecer la longitud de las partes empotradas, disminuyen las presiones en los puntos de apoyo, iguales estas y de signos contrarios á las reacciones relativas π_0 , π_1 , π_2 y π_3 : de aquí se desprende que en la práctica debe darse á esta clase de piezas la mayor entrega posible.

III. Suponiendo que se anulen los espacios $(c_h - c)$ y $(c_k - c)$ las presiones π_0 ; π_1 ; π_2 ; π_3 resultan infinitas; cuyo resultado está en consonancia con la naturaleza de la cuestión, puesto que las presiones son entonces absurdas.

IV. Siendo n el número de fuerzas aplicadas, la elástica es una curva discontinua, formada de $(n + 1)$ ramas comprendidas entre los empotramientos y los puntos de aplicación de las fuerzas; y tangentes de dos en dos en estos puntos: prescindiendo naturalmente de todas las ramas que no pueden considerarse como soluciones, y que se deducirían de la completa discusión de las ecuaciones que las representan.

V. De las fórmulas (7), (9), (23) y (26) se deducen las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \pi_2 (c_n - c) &= \mu_0 \dots \dots \dots \\ \pi_3 (c_k - c) &= \mu_{n+1} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (40)$$

$$X. \quad \left. \begin{aligned} \pi_2 (c_h - c) &= P_1 c_1 + P_2 c_2 + \dots \dots \dots \pi_3 c_n - \pi_1 c \\ \pi_3 (c_k - c) &= P_n (c - c_h) + P_{n-1} (c - c_{n-1} + \dots \dots \dots \pi_2 c_n - \pi_c \end{aligned} \right\} (41)$$

De aquí se desprende que el momento de las fuerzas respecto á las dos secciones de empotramiento, es igual al de las fuerzas π_2 y π_3 aplicadas á las extremidades A_2 y A_3 , que son los puntos interiores de las partes sujetas.

VI. De las fórmulas (6); (7); (8) y (9) se sacan:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots \dots \dots + P_n + \pi_2 + \pi_3 - \pi_1 \\ \pi_1 &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots \dots \dots + P_n + \pi_2 + \pi_3 - \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

Para ver claramente estas dos conclusiones, basta suponer todas las fuerzas trasladadas á cada una de las extremidades A y A₁, y estudiar el efecto de estas fuerzas y de los pares que producen: los cuatro resultados obtenidos son una consecuencia de haber dejado libre el sistema por medio de las reacciones π , introducidas en el cálculo.

VII. Las mismas fórmulas (6); (7); (8) y (9) dan:

$$\begin{aligned} \pi_3 - \pi_1 &= -\frac{P_1 c_1^2}{c^3} (3c - 2c_1) - \dots - \frac{P_n c_n^2}{c^3} (3c - 2c_n) \\ \pi_2 - \pi &= -\frac{P_1 (c - c_1)^2}{c^3} (c + 2c_1) - \dots - \frac{P_n (c - c_n)^2}{c^3} (c + 2c_n) \end{aligned}$$

De las cuales se deduce:

- 1.º Que la diferencia de las presiones sobre las dos extremidades de cada una de las partes empotradas, es una expresión analítica independiente de la longitud de este trozo.
- 2.º Que cualquiera que sean las fuerzas aplicadas, las presiones sobre las extremidades interiores de las partes empotradas, son siempre menores que las que actúan sobre las que limitan la longitud libre del sólido.

VIII. Que si alguna de las fuerzas es negativa basta cambiar el signo al término que la contiene.

IX. En la hipótesis de que las fuerzas sean iguales y equidistantes los puntos de aplicación, se podrían obtener los valores de los momentos μ_0 y μ_1 , etc., en vez de deducirlos de las fórmulas generales (23), (24), etc., por medio de las derivadas segundas de las ecuaciones de las ramas sucesivas, poniendo en las (18), (19), etc., c' en lugar de c_1 , $2c'$ de c_2 , etc.; P_1 en vez de P_2 , P_3 , etc.; y haciendo sucesivamente en las mismas $x = c$, $x = c'$, $x = 2c'$, etc. Este sistema presenta la desventaja de que en el caso de existir fuerzas negativas no hay posibilidad de introducir en el cálculo las oportunas condiciones; al paso que en las fórmulas (28), (29), etc.; de los momentos de las fuerzas se puede cambiar fácilmente el signo de aquellos términos que contiene la fuerza negativa.

X. En los valores (30), (31). . . . , haciendo $n = 1$, resulta:

$$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{4} P c' = \frac{1}{8} P c$$

De donde: *En un sólido empotrado en las dos extremidades y cargado en su medio de una fuerza P_1 , hay tres secciones igualmente expuestas á la rotura, que son las dos de los empotramientos, y la que contiene el punto de aplicacion de la fuerza.*

XI. Los valores de la derivada segunda de las ramas consecutivas de la curva elástica, pasan de positivos á negativos para volver de nuevo á ser positivos: de donde:

1.º Las ramas consecutivas de la curva elástica pasan gradualmente de convexas á cóncavas, respecto al eje de las x , para volver despues á su primitiva forma.

2.º Existen dos puntos de inflexion en la curva elástica.

3.º Verificándose en estos puntos de inflexion $q'' = 0$; será tambien nulo el momento de las fuerzas aplicadas, y por lo tanto, *en todo sólido sujeto en sus dos extremidades, existen siempre dos secciones que no sufren la accion de los momentos de las fuerzas aplicadas; por lo cual es nula en esta seccion la extension longitudinal de las fibras proveniente de la flexion, y no existe en ella más que un estiramiento longitudinal en la direccion de la tangente.* Estas secciones se pueden llamar *secciones de momento nulo*.

4.º Siendo las derivadas segundas de las ramas consecutivas de la curva elástica, funciones de primer grado de x ; tomando las abscisas en una escala de tantos milímetros por metros y los momentos en otra de tantos milímetros por kilogramos; la relacion que existe entre las abscisas de los diversos puntos de la elástica, y los momentos de las fuerzas relativas á los mismos, estará representada geométricamente por una linea recta; por consiguiente, *los valores numéricos de los momentos de las fuerzas relativos á los puntos equidistantes de la seccion del momento nulo, hasta la extremidad más próxima á la rama de la curva elástica que sostiene la citada seccion, serán iguales.*

XII. Las fuerzas P_1 ; P_2 ; P_3 trasladadas á los diversos puntos del sistema, tienden á producir un resbalamiento de las secciones que están aplicadas sobre las contiguas. Considerando un sólido cargado de n fuerzas, y tal que sus dimensiones trasversales se puedan suponer generalmente mucho más pequeñas que las longitudinales; no se ha tenido en cuenta este efecto de las fuerzas, porque el sólido está en condiciones tales, que le es mucho más fácil romperse por la rotacion de sus secciones al rededor de un eje que por resbalar sobre las contiguas.

Estudiando el método seguido para determinar las presiones π_2 y π_3 , es fácil comprender que no puede estar acorde con los efectos naturales, que no admiten discontinuidad de ningun género; prácticamente se observa, que por insensible que sea la curvatura del sólido, cada una de las partes empotradas oprime al muro en que se apoyan de una manera creciente y de arriba á abajo, desde un cierto punto de su longitud, hácia las extremidades A ó A_1 , y de abajo á arriba desde el mismo sitio hácia A_2 ó A_3 .

No siendo enteramente conocida la ley en que se distribuyen las presiones en la parte empotrada, nos limitaremos á hacer una hipótesis que no alejará mucho á la teoria de la práctica, esto es, que *las presiones nulas en un cierto punto de la parte empotrada crecen con la distancia al mismo punto.*

Admitiendo esta hipótesis, y llamando S_s la suma de las presiones ejercidas en la parte $A A_2$ á la izquierda del punto en que es nula, y que llamaremos B , hácia A ; S'_s , la suma de las presiones de B hácia A_2 ; S_d y S'_d las expresiones análogas para la parte de la derecha; de la obra de D'Andrea se deduce:

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{1}{3} \frac{(2\pi + \pi_2)^2}{\pi + \pi^2}, & S'_s &= \frac{1}{3} \frac{(\pi + 2\pi_2)^2}{\pi + \pi^2} \\ S_d &= \frac{1}{3} \frac{(2\pi_1 + \pi_3)^2}{\pi_1 + \pi_3}, & S'_d &= \frac{1}{3} \frac{(\pi_1 + 2\pi_3)^2}{\pi_1 + \pi_3} \end{aligned}$$

Valores deducidos de las fórmulas (6), (7), (8) y (9), y que en la práctica son más fáciles de aplicar que estas últimas al determinar la estabilidad de las partes empotradas.

(Giornale dell' Ingegnere-Architetto ed Agronomo.)