AÑO XIII DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS,

AÑO III DE LA SEGUNDA SERIE.

NÚMERO 17.

EFECTOS DE LAS CURVAS

EN LOS CAMINOS DE HIERRO.

Las curvas de los caminos de hierro ofrecen al paso de los carruajes inconvenientes tanto mas graves, cuanto menor es su radio y mayor la velocidad del movimiento. Estos inconvenientes son: 1.° el rozamiento de resbaladura debido á la diferencia entre los caminos recorridos por las ruedas montadas sobre el mismo eje, que consume una parte de la fuerza de traccion; 2.° el debido al paralelismo de los ejes; 3.° el consiguiente á la fuerza centrífuga, cuyo resultado inmediato es producir un rozamiento, mas ó ménos enérgico, entre el reborde de la rueda y el carril exterior, y cuya intensidad puede llegar á ser suficiente para hacer salir el tren de la vía. Mas bien que medir la intensidad de las resistencias producidas por estas diferentes causas, nos proponemos examinar los medios que en la práctica se emplean para anularlas, ó cuando ménos para disminuirlas, evitando así los efectos desastrosos á que podrian dar lugar.

1.° *Resistencia debida al resbalamiento de las ruedas sobre los carriles.*

Esta resistencia es consecuencia de la necesidad de que cada par de ruedas se halle invariablemente unido á su correspondiente eje, para conseguir la permanencia del carruaje en la vía. En este supuesto, y en el de que las ruedas tengan igual radio, los caminos recorridos por cada una de ellas rodando sobre los carriles son iguales; y como la longitud de la barra exterior en cada curva es mayor que la interior, por ser arcos de círculos concéntricos y del mismo número de grados, resulta que si la rueda interior marcha sin resbalar por una barra, la exterior tendrá que resbalar por la otra, avanzando en una longitud igual á la diferencia entre las de ambas barras. Para apreciar la resistencia F, á que da lugar este resbalamiento, llamemos P el peso del caruaje, r el radio de sus ruedas, e el ancho de la vía, R el radio del eje A B de la vía (figura 1.ª), L la longitud de la curva de 6^0, k la longitud por metro lineal en que resbala la rueda exterior, y f el coeficiente del rozamiento, y se tendrá:

$$L=\frac{2\pi 6^0}{360^0}R,$$

$$ab=\frac{2\pi 6^0}{360^0}(R+\tfrac{1}{2}e),$$

$$a'b'=\frac{2\pi 6^0}{360^0}(R-\tfrac{1}{2}e)$$

que dan:

$$k=\frac{ab-a'b'}{L}=\frac{e}{R},$$

y por consiguiente,

$$F=\frac{1}{2}Pf\frac{e}{R} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

que demuestra que la resistencia es proporcional al ancho de vía y reciprocamente proporcional al radio de la curva, la cual es cero en las alineaciones rectas, y que para que lo sea en las curvas, es preciso que lo sea el resbalamiento $\frac{e}{R}$.

El ancho de vía e, en nuestros ferro-carriles, es de $1^m,73$.

El coeficiente f de rozamiento varía con el estado de la vía de $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{20}$. Si se toma el primer valor, como mas desfavorable, para aplicar la fórmula anterior al caso de una curva de 280^m de radio y un tren de 80 toneladas, será:

$$F=\frac{40.000\times 0{,}1\times 1{,}73}{280}=24^{kg},71,$$

que equivale á $0,^{kg}31$ por tonelada.

Como se ve, si las ruedas cilíndricas no tuvieran otro inconveniente que el rozamiento á que darian lugar por conservarse constante el radio de las ruedas, este seria de bien pequeña importancia. Pero no es así: la rueda cilíndrica sin reborde tendria el gravísimo inconveniente de abandonar la vía, hasta en las alineaciones rectas, y con él, el de producir un rozamiento, apreciable en las rectas y de gran consideracion en las curvas. Por esta razon las ruedas se construyen de llanta cónica, con reborde, que las mantenga en la vía y con un huelgo entre este y la barra, suficiente, en union de la conicidad, para anular en la generalidad de los casos todas las resistencias independientes del paralelismo de los ejes y de la fuerza centrífuga, que consideraremos mas adelante.

Para examinar la relacion que debe existir entre el radio de las ruedas, su conicidad y huelgo y el radio de la curva, supongamos que A C y B D (figura 2.ª) sean las dos ruedas, m n su eje y O el centro de los círculos que describen sin resbalar, y llamando $\frac{1}{a}$ la conicidad de la rueda, ó sea la tangente del ángulo γ, que las generatrices del cono forman con su eje; r el rádio de ambas ruedas, para la posicion en que su eje m n es horizontal, que llamaremos posicion normal; λ' el espacio lateral que recorre la rueda, λ el máximo valor de λ', ó sea el huelgo entre el reborde de una rueda y la barra correspondiente; z la cantidad B b y a A en que aumenta el de la exterior y mengua el de la

interior, en el momento en que no hay resbalamiento, y ρ el radio O A, se tendrá:

$$OA : OB :: An : Bm,$$

que da:

$$\rho = \frac{ef}{2\lambda},$$

pero,

$$\frac{f}{2} = \lambda \times \frac{r}{a},$$

luego,

$$\rho = \frac{e}{2\lambda} \times \frac{r}{a} \quad (2).$$

Esta expresion demuestra que el radio de la curva que las ruedas tienden á describir sin resbalar, es variable en cada momento, y que es recíprocamente proporcional al desvío lateral λ que experimentan; y como cuando el carruaje marcha por una alineacion recta, solo el buen estado de la via y la conicidad son los que tienden á evitar este desvío, y por pequeño que el sea, adquiere un valor límite, aunque muy grande, llevando consigo un rozamiento para una de las ruedas, si bien muy pequeño (fórmula 1), resulta la conveniencia de conservar la via en el mejor estado.

Las ruedas del carruaje tienen que recorrer la curva de radio R, luego para que no haya resbalamiento, deberá tenerse

$$R = \frac{e}{2\lambda} \times \frac{r}{\frac{1}{a}} \quad (3).$$

Para los dos pares de ruedas del mismo carruaje, que recorren una curva, λ es constante; luego es preciso que tambien lo sea $\frac{r}{\frac{1}{a}}$, ó lo que es lo mismo, es preciso que los radios de ambos pares sean iguales siéndolo la conicidad, y que si no lo son, sea igualmente diferente esta, segun esta relacion:

$$\frac{r}{\frac{1}{a}} = \frac{r'}{\frac{1}{a'}},$$

que da,

$$\frac{1}{a'} = \frac{r'}{r} \times \frac{1}{a} \quad (4).$$

Esta observacion es de importancia en las locomotoras.

El mínimo valor de R corresponde al máximo λ de λ, y será

$$R = \frac{e}{2\lambda} \times \frac{r}{\frac{1}{a}} \quad (5).$$

Esta expresion demuestra que en los paises accidentados, donde es tan conveniente reducir el límite de los radios de las curvas, conviene, bajo el punto de vista de la resistencia, adoptar la via estrecha y ruedas de pequeño diámetro y gran conicidad y huelgo.

Al hacer aplicacion de esta fórmula, supondremos que se trata de una locomotora de viajeros, por ser la que mas importa conservar en la via. El valor de e se refiere á la distancia entre los puntos de apoyo de las ruedas en su posicion normal, y siendo 1m,75 la que separa los ejes de las barras, tomaremos e = 1m,70.

El radio de las ruedas motrices suele variar, segun la velocidad á que deben marchar, entre 0m,70 y 1m,05, y las libres entre 0m,50 y 0m,80. Tomaremos 0m,84, que tienen las locomotoras tender sistema Waessen, que corren en la línea de Isabel II.

La conicidad varia entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{20}$; tomaremos como término medio aproximado $\frac{1}{10}$.

El huelgo ó desvío límite lateral, suele variar entre 0m,01 y 0m,04; su término medio 0m,025.

Con estos valores la fórmula (5) da:

$$R = \frac{1,70 \times 0,84}{2 \times 0,025 \times 0,1} = \frac{1,428}{0,005} = 285^m,6.$$

Admitiendo que la locomotora Waessen citada, tenga la conicidad y huelgo expresados en sus ruedas motrices, las libres, cuyo radio es de 0m,45, deberian tener por conicidad (fórmula 4),

$$\frac{1}{a'} = \frac{0,45}{0,84} \times 0,1 = 0,0536 = \frac{1}{18,66}.$$

Para el radio límite legal, 280m, la fórmula (5) da:

$$\lambda \times \frac{1}{a} = \frac{e}{2R} = \frac{1,70 \times 0,84}{2 \times 280} = 0,00255,$$

para

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{10},$$

$$\lambda = 0^m,0255.$$

2.°—*Resistencia debida al paralelismo de los ejes.*

Cuanto se ha dicho sobre el modo de evitar la resistencia debida al resbalamiento de las ruedas sobre las barras, supone que los ejes de las ruedas convergen hácia el centro de la curva que recorren: cuando esto no se verifica, queda esta nueva causa de resistencia. Siendo los ejes paralelos, los puntos de apoyo de las cuatro ruedas sobre los carriles, determinan los vértices de un rectángulo invariable: tendiendo el carruaje á marchar, segun la prolongacion del elemento que ocupa de la curva, la rueda delantera exterior propende á salirse de la via hasta que, rozando su reborde con el carril que no le permite salir de ella, obliga á la interior de detras á rozar igualmente sobre el que ella sigue en sentido contrario de la primera, dando por resultado una resistencia que, aunque disminuida por la conicidad y huelgo de las ruedas, no por eso deja de ser de importancia, cuando es considerable la separacion de los ejes,

relativamente al radio de la curva. Ya que no sea posible establecer *á priori* una formula que mida la intensidad de esta resistencia, nos proponemos calcular el juego que deberian tener los extremos de empotramiento de los ejes con las ruedas, para que tomen la direccion del centro de la curva á separacion que podrá dar una idea aproximada de dicha resistencia.

Supongamos que mn y pq (fig. 3) representen la posicion de los ejes paralelos entre sí y el radio gO de la curva, medio entre los puntos de apoyo de las ruedas. Si los ejes tuvieran juego en sus puntos medios s, v, inmediatamente que entren en la curva tomarian las posiciones $m'n'$ y $p'q'$ convergentes al centro O, recorriendo sus extremos los espacios mm', nn', pp' y qq' iguales. Para calcularlos, llamemos l la separacion sv de los ejes, que es constante, y se tendrá:

$$Ol : st :: Oh : n'h,$$

ó

$$R : \tfrac{1}{2}l :: R - \tfrac{1}{4}e : \tfrac{1}{2}n'h,$$

que da:

$$n'h = \frac{\tfrac{1}{2}l(R - \tfrac{1}{4}e)}{R},$$

y por consiguiente,

$$nn' = nh - n'h = \tfrac{1}{2}l - \frac{\tfrac{1}{4}l(R - \tfrac{1}{4}e)}{R} = \tfrac{1}{4}he$$

Si la curva estuviera en sentido contrario, el eje mn tomaria la posicion $m_1 n_1$, tal que el desvio $nn_1 = nn'$; por consiguiente, llamando x el juego total del husillo de cada eje se tendrá:

$$x = 2nn' = \frac{le}{2R} \quad \ldots\ldots (6),$$

que expresa que *el juego de cada extremo de eje es proporcional á la separacion de los mismos ejes y al ancho de via, y reciprocamente proporcional al diámetro de la curva.*

En la locomotora citada de Waessen, la separacion de los ejes motores, que son paralelos, es de $2^m,30$, de modo que en curvas del radio limite de 280^m, tiende á producirse el juego

$$x = \frac{2,^m30 \times 0,^m70}{2 \times 280} = 0,^m007.$$

5.º—*Efecto de la fuerza centrífuga.*

Cuando un cuerpo de masa M se mueve con una velocidad v sobre una curva circular de radio R, se desarrolla una fuerza centrífuga, dirigida segun la prolongacion del radio, que, llamándola F, tiene por expresion

$$F = \frac{M v^2}{R},$$

y como $P = Mg$, siendo P el peso del mismo cuerpo,

$$F = \frac{P v^2}{g R} \quad (7)$$

Aplicando esta fórmula al caso de un tren de 80 toneladas, marchando con una velocidad de 7^m (25 kilómetros por hora) por una curva de 280^m de radio, y tomando por g el valor medio $9,^m8$ será:

$$F = \frac{80\,000 \times 49}{9,8 \times 280} = 1.429^{kg},$$

fuerza que, si hubiera de contrarestarse directamente por solo el reborde de las ruedas, destruiria bien pronto estas y los carriles exteriores, que por otra parte se hallarian solicitados á girar hácia fuera de la via.

La fuerza centrífuga se contraresta por otra igual y contraria, debida parte á la conicidad y juego de las ruedas, y la parte restante á la colocacion de la barra exterior á mayor altura que la interior. El efecto de la conicidad y juego de las ruedas, equivale á una sobre-elevacion del mismo carril, que es variable con la posicion del eje respecto á su posicion *normal*, entre los limites que permite el mayor desvio x; esta sobre-elevacion debida á la conicidad y al juego, puede pues ser cero para la posicion normal de las ruedas, positiva cuando se desvian hácia fuera de la curva y negativa, cuando en sentido contrario. La sobre-elevacion *efectiva* de la barra exterior, es constante para cada curva, y conviene por consiguiente calcularla para el caso mas desfavorable.

Para deducir la fórmula que da la sobre-elevacion efectiva del carril exterior, supongamos que A y B (fig. 4) representan los carriles en la entrada de una curva, y sea α el ángulo que la linea AB de los puntos de contacto de las ruedas forma con la horizontal. En el momento en que el carruaje, supuesto sin conicidad, entra en la curva, tiende á dirigirse al centro por efecto de la gravedad, con una fuerza horizontal, que tiene por expresion

$$P \operatorname{tang} \alpha,$$

y por efecto de la fuerza centrífuga tiende á alejarse de él con otra medida por

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{R}.$$

Esta pues quedará contrarestada exactamente cuando

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v^2}{g R}.$$

Siendo las ruedas M y N cónicas, sus llantas mn y pq forman ángulos distintos con la recta AB de los apoyos. Como esta recta es inclinada, sobre el interior A carga un peso mayor que $\frac{1}{4}$ P, y sobre el exterior B otro menor que $\frac{1}{4}$ P, cuyos valores dependen de la situacion del centro de gravedad, pero que tienen por suma P. Como la diferencia entre estas presiones en A y en B es siempre muy pequeña, por serlo la inclinacion de AB, la conicidad y el huelgo, y porque siempre se procura que el centro de gravedad esté lo mas bajo posible, tomaremos por valor constante de cada una $\frac{1}{4}$ P.

Si se llama γ el ángulo de las generatrices del cono de cada rueda con su eje, la mn formará con la horizontal A D, ántes que el carruaje experimente ningun desvio lateral, el ángulo

$$CAD = CAB - DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

y la $p\,q$ el

$$q\,B\,h = q\,B\,g + g\,B\,h = \gamma + \alpha.$$

La primera tiende á alejarse del centro con una fuerza horizontal

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,P\,\text{tang}\,(\gamma - \alpha),$$

la segunda á acercarse á él con otra,

$$F_3 = \tfrac{1}{2}\,P\,\text{tang}\,(\gamma + \alpha).$$

La resultante de estas dos fuerzas es

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\,P\,[\text{tang}\,(\gamma + \alpha) - \text{tang}\,(\gamma - \alpha)] \quad \ldots \quad (8).$$

En la alineacion recta anterior á la curva, los carriles están de nivel, excepto en la última parte D de ella, en que el exterior sube gradualmente para unirse con el punto B de entrada de la curva. En el orígen de la parte D, α es cero, y por consiguiente, se tiene:

$$F_1 = o.$$

Durante el espacio D el valor de α va sucesivamente creciendo desde o hasta α, y por consiguiente F_1 desde o hasta

$$\tfrac{1}{2}\,P\,[\text{tang}\,(\gamma + \alpha) - \text{tang}\,(\gamma - \alpha)].$$

Como en este trayecto no hay fuerza centrífuga que contrareste á F_1, el carruaje tiende á desviarse hácia el lado del centro con una fuerza, que solo podrán reducir ó anular la conicidad y el huelgo.

Inmediatamente despues que el carruaje empieza á marchar por la curva, se desarrolla la fuerza centrífuga que contraresta á la centrípeta F_1, y aun puede excederla. El carruaje se desvia lateralmente hácia fuera de la curva, hasta tomar una posicion $M_1\,N_1$ conveniente para destruir la fuerza centrífuga: la llanta $m_1\,n_1$ forma con la horizontal el ángulo

$$n_1\,A\,D = \gamma - \alpha - n_1\,A\,n$$

y la $p_1\,q_1$ el

$$q_1\,B\,h = \gamma + \alpha + q_1\,B\,q.$$

Los ángulos $n_1\,A\,n$ y $q_1\,B\,q$ son iguales entre sí y al formado por los ejes rv y $r_1\,v_1$ de las ruedas, y llamándole δ será:

$$n_1\,A\,D = \gamma - \alpha - 2\delta,$$
$$q_1\,B\,h = \gamma + \alpha + 2\delta.$$

En esta nueva posicion el carruaje, por efecto de la presion en A, tiende á separarse del centro con la fuerza

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,P\,\text{tang}\,(\gamma - \alpha - 2\delta),$$

y por efecto de la presion en B, á acercarse con la

$$F_3 = \tfrac{1}{2}\,P\,\text{tang}\,(\gamma + \alpha + 2\delta),$$

cuya resultante

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\,P\,[\text{tang}\,(\gamma + \alpha + 2\delta) - \text{tang}\,(\gamma - \alpha - 2\delta)] \quad \ldots \quad (9),$$

expresa la fuerza centrípeta que obra sobre el carruaje, que solo puede ser cero cuando $\delta = -\alpha$, y comunica en este momento la fuerza centrífuga es

$$F = \frac{P}{g}\,\frac{v^2}{R}.$$

para que haya equilibrio, es preciso que se tenga:

$$\frac{v^2}{g\,R} = \tfrac{1}{2}\,[\text{tang}\,(\gamma + \alpha + \delta) - \text{tang}\,(\gamma - \alpha - \delta)] \quad \ldots \quad (10),$$

que sirve para determinar α, y por consiguiente la sobre-elevacion del carril exterior, ó cualquiera de las demás cantidades que entran en ella.

Para tener α, observarémos que siendo (trig.)

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \frac{\text{tang}\,a \pm \text{tang}\,b}{1 \mp \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b},$$

se tiene:

$$\text{tang}\,[(\gamma \pm \delta) \pm \alpha] = \frac{\text{tang}\,(\gamma \pm \delta) \pm \text{tang}\,\alpha}{1 \mp \text{tang}\,(\gamma \pm \delta)\,\text{tang}\,\alpha},$$

y por consiguiente,

$$\frac{2\,v^2}{g\,R} = \frac{\text{tang}\,(\gamma + \delta) + \text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}\,(\gamma + \delta)\,\text{tang}\,\alpha} + \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,(\gamma - \delta)}{1 + \text{tang}\,(\gamma - \delta)\,\text{tang}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}\text{tang}\,(\gamma+\delta) + \text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)\,\text{tang}\\ \alpha + \text{tang}^2\,\alpha\,\text{tang}\,(\gamma-\delta) + \text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,(\gamma-\delta) - \text{tang}^2\\ \alpha\,\text{tang}\,(\gamma+\delta) + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)\,\text{tang}\,\alpha\end{array}\right\}}{1 - \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,(\gamma-\delta)\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)\,\text{tang}^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\,\text{tang}\,\alpha\,[1 + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)] - \text{tang}^2\,\alpha\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)] + \text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)}{1 - \text{tang}\,\alpha\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)] - \text{tang}^2\,\alpha\,\text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)} =$$

ó

$$\frac{2\,v^2}{g\,R} - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)]\,\text{tang}\,\alpha - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,\text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)\,\text{tang}^2\,\alpha =$$

$$= 2\,[1 + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)]\,\text{tang}\,\alpha - [\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)]\,\text{tang}^2\,\alpha + \text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta),$$

ó finalmente,

$$[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta) - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,\text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)]\,\text{tang}^2\,\alpha -$$

$$\left[2\,[1 + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)] - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)]\right]\text{tang}\,\alpha + \frac{2\,v^2}{g\,R} - [\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)] = o \quad \ldots \quad (11).$$

Si se quiere poner esta fórmula en funcion de la sobre-elevacion, que llamarémos h, se observará que

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1\,h}{e},$$

con lo que se convierte en

$$[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta) - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,\text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)]\,h^2 - \left[2\,[1 + \text{tang}\,(\gamma+\delta)\,\text{tang}\,(\gamma-\delta)] - \frac{2\,v^2}{g\,R}\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)]\right]e\,h +$$

$$+ \left[\frac{2\,v^2}{g\,R} - [\text{tang}\,(\gamma+\delta) - \text{tang}\,(\gamma-\delta)]\right]e^2 = o \quad (11')$$

El ángulo γ es conocido y tiene por valor

$$\gamma = \text{ángulo}\left(\text{tang} = \frac{1}{a} = \text{conicidad}\right) \quad (12).$$

Para calcular δ, observaremos que las dos generatrices de contacto de los conos, se cortan bajo un ángulo A C B, cuyo vértice C describe con el desvío lateral del carruaje el arco de círculo A C B que tiene por radio,

$$r' = \frac{(\frac{1}{2}e)^2 + \overline{OC}^2}{2\,\overline{OC}} = \frac{1}{4}e\left(\frac{1}{a} + a\right)$$

y por número de grados 4γ.

Supongamos que el desvío lateral ó huelgo, medido en el sentido del eje de la rueda, sea $BK = \lambda$; la longitud $B'_1 B$ de la llanta que le corresponde, tiene por valor,

$$B'_1 B = \frac{BK}{\cos\gamma} = \frac{\lambda}{\cos\gamma}.$$

Cuando las ruedas del carruaje han tomado la posicion $M_1 N_1$ la llanta exterior ocupa la $C_1 q_1$, el punto B'_1, contiguo al reborde, se halla en B, de modo que se tiene:

$$C_1 B = C B'_1 = C B - B B'_1 = \frac{e}{2\cos\gamma} - \frac{\lambda}{\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\gamma} \times \left(\frac{e}{2} - \lambda\right).$$

Entónces el ángulo δ tiene por valor:

$$\delta = T B C - T B C_1,$$

y como

$$T B C = \gamma$$

y

$$T B C_1 = \text{ang}\left(\text{sen} = \frac{\frac{1}{2}BC_1}{r'} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}\left(\frac{e}{2} - \lambda\right)}{\frac{1}{2}e\left(\frac{1}{a} + a\right)} = \frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\sec\gamma\right),$$

resulta:

$$\delta = \gamma - \text{ang}\left(\text{sen} = \frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\sec\gamma\right) \quad (13).$$

Las fórmulas (11), (12) y (13) resuelven completamente el problema de la determinacion de la sobre-elevacion del carril exterior.

Si se quiere tener δ independientemente del ángulo γ, basta sustituir en la fórmula (13) por γ su valor deducido de la (12), que da:

$$\frac{\text{sen}^2\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{1}{a^2},$$

y esta

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

y

$$\sec\gamma = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

De la ecuacion (13) se deduce:

$$\text{ang}\left(\text{sen} = \frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\sec\gamma\right) = \gamma - \delta,$$

ó

$$\frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)} \times \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \text{sen}(\gamma - \delta) = \text{sen}\,\gamma\cos\delta - \cos\gamma\,\text{sen}\,\delta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{1-\text{sen}^2\delta} - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\text{sen}\,\delta,$$

ó

$$e - 2\lambda = e\sqrt{1-\text{sen}^2\delta} - e\,a\,\text{sen}\,\delta,$$

ó

$$\text{sen}^2\delta + \frac{2a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\text{sen}\,\delta + \frac{4\lambda(e-\lambda)}{e^2(1+a^2)} = 0,$$

que da:

$$\text{sen}\,\delta = -\frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)} + \sqrt{\left(\frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\right)^2 - \frac{4\lambda(e-\lambda)}{e^2(1+a^2)}} \quad (14),$$

que da el valor de δ en funcion de la conicidad y huelgo, y demuestra que será cero, cuando lo sea

$$\frac{4\lambda(e-\lambda)\frac{1}{a^2}}{e^2\left(\frac{1}{a^2}+1\right)},$$

ó 1.° Cuando $\lambda = 0$, es decir *cuando no haya juego* lateral; 2.° cuando $\frac{1}{a} = 0$, esto es, *cuando no haya conicidad.*

Si ahora se pusieran en la fórmula (11) los valores de γ y δ dados por las (12) y (14), resultaria una ecuacion final que daria h, en funcion de la conicidad y el huelgo; pero seria tan complicada que su aplicacion exigiria mas tiempo que el de las (12), (13) y (11).

La fórmula (11) es general, y por consiguiente aplicable á cualquier elemento de la via. Vamos á proponernos discutirla, examinando los diferentes casos en que podrá encontrarse un carruaje desde que entra en una alineacion recta hasta que sale de la curva siguiente. Este trayecto se compone de tres partes: 1.ª parte recta, en que la curva contigua no ejerce ninguna influencia: 2.ª parte de la recta, de longitud l, que une la anterior con la curva: 3.ª la alineacion curva.

1.ª *Parte recta, independiente de la curva.* En esta parte del trayecto $R = \infty$, no hay causa que desvie el carruaje de su posicion normal, y por consiguiente $\lambda = 0$, con lo cual, segun la fórmula (14) $\delta = 0$. En estos supuestos, la (11) da:

$$h' = 0.$$

2.º *Parte recta dependiente de la curva.* En ella la barra, prolongacion de la exterior de la curva, sube con una pendiente p en la distancia D; en cada uno de los puntos de esta hay una sobre-elevacion que va creciendo desde el principio de esta distancia, en que, como se acaba de ver, $h'=o$ hasta el último punto, que es el de entrada de la curva, en que $h=h_1$. El carruaje tiende á desviarse hácia el lado del centro con una fuerza dada por la fórmula (9), cuya intensidad crece con α ó sea con h', siendo el mayor para el valor h_1 de esta cantidad, y el menor, que es cero, cuando $\alpha=+\delta$. Cuando α es en valor absoluto menor que δ, el reborde de la rueda del lado del centro de la curva no llega á tocar á la barra; esto se verifica en el momento en que $\alpha=\delta$, y cuando $\alpha>\delta$ el reborde rozará sobre la barra con tanta mayor energía cuanto mayor sea el exceso de α sobre δ.

En esta parte de la vía se tiene $R=\infty$, con lo cual la fórmula (10) ó su igual (11) da:

$$\gamma+\alpha+\delta=\gamma-\alpha-\delta,$$

ó prescindiendo del signo,

$$\text{tang}\,\alpha=\text{tang}\,\delta,$$

y por consiguiente,

$$h''=e\,\text{tang}\,\delta=e\,\text{tang}\,(\text{sen}=\frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\sec\gamma) \quad (15),$$

observando que la barra exterior ha de ganar la desnivelacion h correspondiente á la curva que sigue en la distancia D, tomando por este concepto la pendiente $\frac{h}{D}$, y llamando d la parte de D en la cual el reborde no toca al carril, lo que se verifica desde el punto en que su sobre-elevacion trasversal es h'', se tendrá:

$$d=\frac{D}{h}h'' \quad \ldots \quad (16),$$

y por consiguiente la parte de D, en que el reborde va rozando con la barra del lado del centro de la curva, tiene por expresion:

$$D-d=D\frac{h-h''}{h} \quad \ldots \quad (17).$$

La presion ejercida en el momento de entrar el carruaje en la curva está dada por la fór. (19).

3.º *Alineacion curva.* Suponiendo constante la velocidad máxima en el paso de la curva y conocidas la conicidad y el huelgo, y por estos los ángulos γ y δ por medio de las fórmulas (12) y (13), la (11) da inmediatamente la sobre-elevacion h efectiva del carril exterior, necesaria para que el reborde de la rueda no llegue á tocarlo.

Prefijada la velocidad máxima de que se haga uso para calcular la sobre-elevacion correspondiente á cada radio, que no debe excederse en el paso de la curva, hay un mínimo para esta velocidad, que no debe disminuirse, si se ha de impedir que el reborde de la rueda interior roce con su carril. Este límite se determina por la fórmula (10) ó su igual (11), observando que este contacto tendrá lugar en el momento en que el carruaje se desvie hácia el centro de la curva girando el eje el ángulo δ y tomando la posicion M' N', y por consiguiente, poniendo en ella $-\delta$ en lugar de δ, con lo cual se convierte en

$$v=\sqrt{\tfrac{1}{2}gR[\text{tang}\,(\gamma+\alpha-\delta)-\text{tang}\,(\gamma-\alpha+\delta)]} \quad \ldots \quad (18).$$

Si la velocidad de la marcha fuese inferior á la dada por esta expresion, el reborde de la rueda interior rozaria sobre su carril con una presion dada por la fórmula

$$P=\tfrac{1}{2}P[\text{tang}\,(\gamma+\alpha-\delta)-\text{tang}\,(\gamma-\alpha+\delta)] \quad \ldots \quad (19).$$

La conicidad y huelgo de las llantas de las ruedas producen un efecto equivalente al de la sobre-elevacion del carril exterior; y como esta depende de la velocidad de marcha y del radio de la curva, resulta para cada valor de la primera el que debe tener el radio para que la sobre-elevacion sea nula, y recíprocamente. En efecto, para que esto se verifique es necesario que tang $\alpha=o$, con lo que la fórmula (10) da:

$$R=\frac{2v^2}{g\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta)-\text{tang}\,(\gamma-\delta)]} \quad \ldots \quad (20),$$

$$v=\sqrt{\tfrac{1}{2}Rg\,[\text{tang}\,(\gamma+\delta)-\text{tang}\,(\gamma-\delta)]} \quad \ldots \quad (21),$$

$$\text{tang}\,\gamma=\sqrt{\frac{v^2-Rg\,\text{tang}\,\delta}{(Rg+v^2\,\text{tang}\,\delta)\,\text{tang}\,\delta}} \quad \ldots \quad (22).$$

Si al calcular la sobre-elevacion del carril se prescindiera del efecto de la conicidad y el huelgo, se obtendria directamente, ó si no haciendo en las fórmulas (10) ú (11) $\gamma=o$, y por consiguiente, segun la (14) $\delta=o$,

$$\frac{v^2}{gR}=\text{tang}\,\alpha$$

ó

$$h_1=\frac{ev^2}{gR} \quad \ldots \quad (23).$$

La fórmula (11) puede simplificarse para facilitar su aplicacion en la práctica, sin perjuicio de la suficiente aproximacion en los resultados, observando que los ángulos γ, α y δ son siempre suficientemente pequeños para que se pueda sustituir sin error sensible la suma ó diferencia de las tangentes en lugar de las tangentes de la suma ó diferencia de estos ángulos. En este supuesto se convierte en

$$\frac{v^2}{gR}=\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\delta,$$

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{v^2}{gR}-\text{tang}\,\delta \quad \ldots \quad (24),$$

que da:

$$h=e\left[\frac{v^2}{gR}-\text{tang}[\gamma-\text{ang}\,(\text{sen}=\frac{a(e-2\lambda)}{e(1+a^2)}\sec\gamma)]\right] \quad (a).$$

Comparando la fórmula (24) con la (23) y llamando Δh la diferencia, esto es, la sobre-elevacion que compensa la conicidad y huelgo, se tiene:

$$\Delta h=e\,\text{tang}\,\delta \quad \ldots \quad (26),$$ que es la misma (15).

Aplicacion de estas fórmulas á algunos casos particulares.

1er. Problema.—Qué sobre-elevacion debe darse á una curva de 280.m de radio en una via de 1,m70 de ancho, para que un material que tiene $^1/_{10}$ de conicidad y 0,m025 de huelgo, pueda recorrerla sin que los rebordes toquen en los carriles, con una velocidad de 8m por 1″ (28,k80 por hora)?

La fórmula (12) da: $\gamma = 5.^{\circ}\ 42',\ 6355$
La — (13) . . . . . $\delta = 0.^{\circ}\ 10',\ 1096$
La — (11) . . . . . $\text{tang}\,\alpha = 0,^{m}\ 020156$
y $\alpha = 1.^{\circ}\ 9',\ 2818$

y por consiguiente,

$h = e\,\text{tang}\,\alpha = 1,^{m}70 \times 0,020156 = 0,^{m}0342652$
La aproximada (25) da . . . $h = 0,^{m}0346509$
La (25) que no tiene en cuenta la conicidad. . . . . $h = 0,^{m}0396501$
La (26) . . . . . $\Delta h = 0;\ 0049992$

2.do problema.—Suponiendo que en el caso del problema anterior se tome por sobre-elevacion 0m,035, y que esta altura se gane en 20m de distancia, ¿que parte de ella recorrerá el tren sin rozar el reborde de la rueda interior, y en qué parte tendrá lugar este rozamiento?

La fórmula (16) da:

$$d = \frac{20}{0,035} \times 0,0049992 = 2^{m},8567,$$

y la (17)

$$D - d = 20\,\frac{0,035 - 0,0049992}{0,035} = 17^{m},1455.$$

3.er problema.—¿Qué curvas sin sobre-elevacion podrán recorrerse con la velocidad de 8m por 1″ (28k 80 por hora), con un material de $^1/_{10}$ de conicidad y 0m,025 de huelgo?

Todas las que tengan un radio mayor que el dado por la fórmula (20), que es:

$$R = \frac{2 \times 64}{9,8 \times 0,0059403} = 2198^{m},75.$$

4.° problema.—¿Con qué velocidad deberá recorrerse una curva de 280m de radio, en el supuesto de que no hay sobre-elevacion alguna, con material de $^1/_{10}$ de conicidad y 0m,025 de huelgo?

La fórmula (21) da:

$$v = \sqrt{\frac{280 \times 9,8 \times 0,0059403}{2}} = 2^{m},855 \text{ por } 1'' = 10^{k},28 \text{ por hora.}$$

5.° problema.—Con qué velocidad mínima debe recorrer una curva de 280m de radio, y 0m,035 de sobre-elevacion, un tren compuesto de material de $^1/_{10}$ de conicidad y 0m,025 de huelgo, para que el reborde de las ruedas interiores no rocen al carril?

La fórmula (18) en que $\left\{\begin{array}{l}\gamma = 5.^{\circ}\ 42',\ 6355\\ \delta = 0.^{\circ}\ 10',\ 1096\\ \alpha = 1.^{\circ}\ 9',\ 2818\end{array}\right\}$ como en el problema primero, da:

$$v = \sqrt{9,8 \times 280\,(0,1174162 - 0,0826435)} = 6^{m},9071$$

por 1″ = 24k,87 por hora.

Estos resultados, juntamente con los obtenidos haciendo variar la conicidad, el huelgo y la velocidad, se hallan consignados en el estado siguiente:

Conicidad	Huelgo máximo	Radio de la curva	Velocidad máxima por hora	SOBRE ELEVACION EFECTIVA. Exacta	Aproximada.	DEBIDA á la conicidad.	Total.	Velocidad mínima para evitar el rozamiento interior.	Aumento dependiente en la parte recta de la barra exterior	Longitud recorrida sin rozamiento.	Longitud recorrida con rozamiento.	Radio mínimo de las curvas sin sobre-elevacion que pueden recorrerse con la velocidad máxima.	Velocidad máxima con que puede recorrerse la curva sin sobre-elevacion.
	Metros.	Metros.	Kilómetros.	Metros.	Metros.	Metros.	Metros.	Kilómetros.	Metros.	Metros.	Metros.	Metros.	Kilómetros.
1/10	0,025	280	28,80	0,03127	0,03465	0,00500	0,05965	23,87	0,001775	2,86	17,14	2198,75	10,28
1/15	0,025	280	28,80	0,01214	0,01531	0,00409	0,03940	23,75	0,001761	2,14	17,86	3794,99	10,28
1/20	0,025	280	28,80	0,00865	0,01315	0,00350	0,03665	27,63	0,001946	0,96	19,04	7582,97	5,61
0	0,025	280	28,80	0,00865	0,01315	0,00350	0,03665	27,63	0,001946	0,96	19,04	7582,97	5,61
1/10	0,015	280	28,80	0,03127	0,03465	0,00500	0,05965	23,87	0,001775	2,86	17,14	2198,75	10,28
1/15	0,015	280	28,80	0,01214	0,01531	0,00409	0,03940	23,75	0,001761	2,14	17,86	3794,99	10,28
1/20	0,015	280	28,80	0,00865	0,01315	0,00350	0,03665	27,63	0,001946	0,96	19,04	7582,97	5,61
0	0,015	280	28,80	0,00865	0,01315	0,00350	0,03665	27,63	0,001946	0,96	19,04	7582,97	5,61
1/10	0,025	280	57,60	0,15076	0,15710	0,00150	0,15860	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
1/15	0,025	280	57,60	0,14214	0,14831	0,00150	0,14980	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
1/20	0,025	280	57,60	0,13865	0,14515	0,00150	0,14665	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
0	0,025	280	57,60	0,13865	0,14515	0,00150	0,14665	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
1/10	0,015	280	57,60	0,15076	0,15710	0,00150	0,15860	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
1/15	0,015	280	57,60	0,14214	0,14831	0,00150	0,14980	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
1/20	0,015	280	57,60	0,13865	0,14515	0,00150	0,14665	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61
0	0,015	280	57,60	0,13865	0,14515	0,00150	0,14665	57,06	0,00196	0,76	79,24	29 531,88	5,61

Madrid Julio de 1865.

J. López del Rivero.

Fig. 1ª

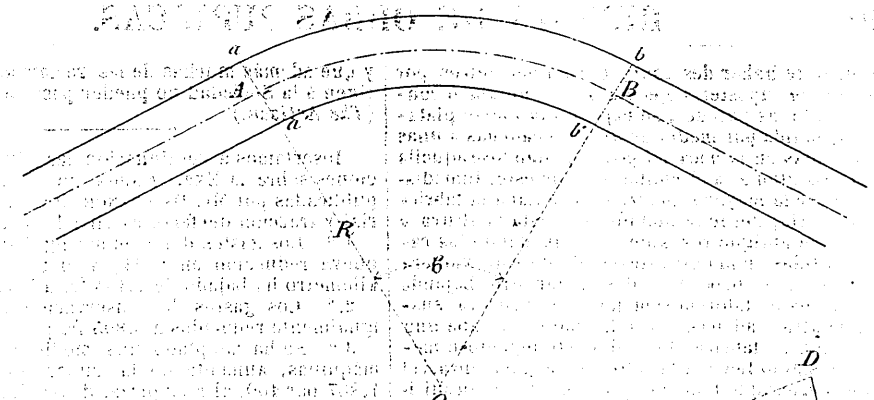


Fig. 2ª

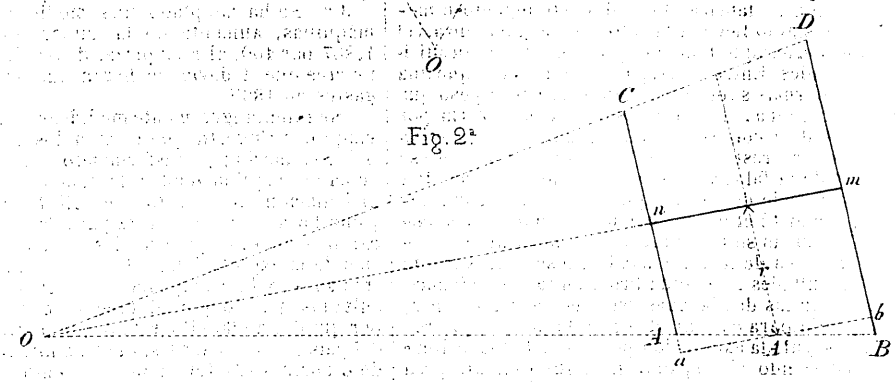


Fig. 3ª

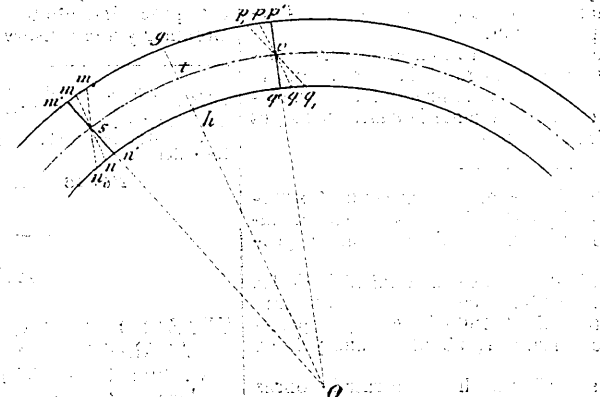
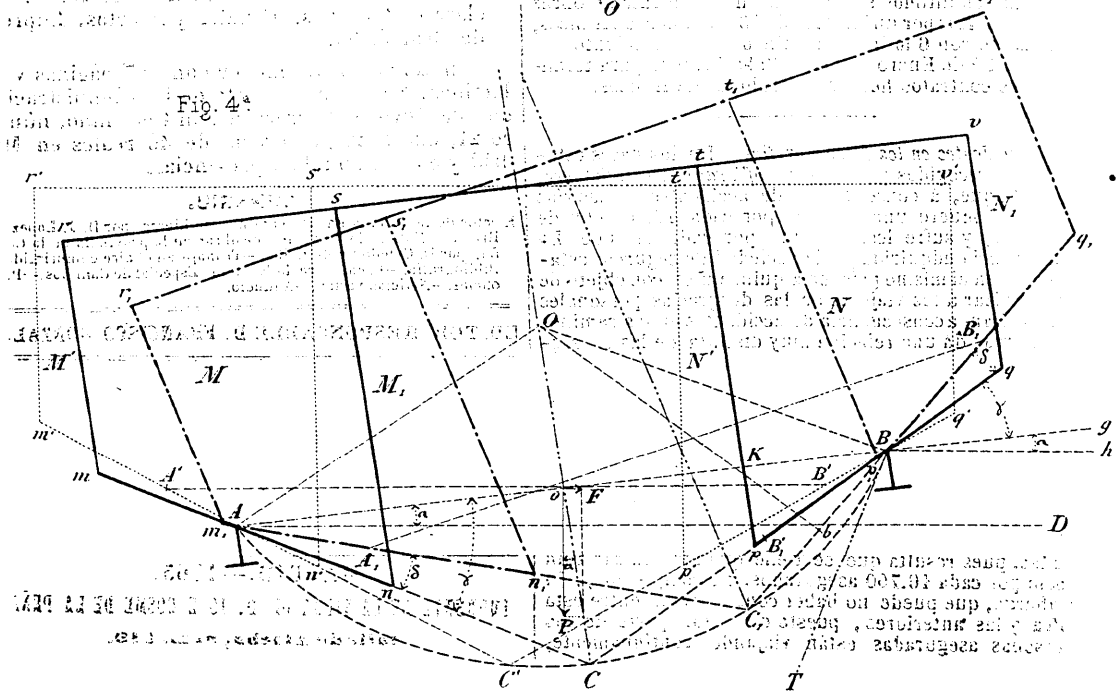


Fig. 4ª



Lit de J. DOMON, Madrid