

DE LA CUADRATURA DE LOS POLÍGONOS.

MEMORIA DEL INGENIERO DOMENICO TESSARI.

(Continuacion.)

§ 2.º

Fórmula general.

16 Sabemos que la expresion

$$\sum_p^q \varphi(x)$$

expresa la suma de todos los valores de $\varphi(x)$ correspondientes á todos los valores de la variable x comprendidos entre p y q inclusive.

Asi se tendrá la igualdad

$$\sum_p^q \varphi(x) = \varphi(p) + \varphi(p+1) + \varphi(p+2) \dots + \varphi(q-1) + \varphi(q) \quad (9)$$

$$\text{y } \sum_p^q \varphi(x) = \sum_p^{q-1} \varphi(x) + \varphi(q) \quad (9)$$

17 Adaptando estas características á las fórmulas (III) (IV) (V) advirtiendo que la variable x se refiere al sub-índice de los lados y de los ángulos, se llegará á una fórmula sencilla y elegante,

$$2 S_3 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1$$

$$2 S_4 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3$$

$$2 S_5 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^4 a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - a_5 a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4)$$

$$2 S_6 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^5 a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - \sum_5^4 a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1})$$

$$+ a_5 a_7 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

$$2 S_7 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^6 a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - \sum_5^5 a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) +$$

$$\sum_5^4 a_x a_{x+1} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) - a_5 a_7 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6).$$

Comparando esta fórmula con la anterior y con la siguiente se puede deducir la regla; que el primer término es siempre $a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1$; despues sigue la suma de los términos de la forma $a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x$ despues la de los términos de la forma $a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1})$ despues la de los términos de la forma $a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2})$ asi sucesivamente hasta el último término, que es igual al producto del tercer lado por el último y por el seno de la suma de todos los ángulos desde el primero hasta el último. Vamos á ver ahora los limites que tiene cada una de las sumas: la 1.ª se estiende desde el número 3 al número de lados del poligono disminuido de una unidad, las otras su-

mas tienen constantemente 5 por limite inferior y el limite superior va disminuyendo de una unidad.

Los signos de las sumas son alternativamente positivos y negativos.

Esta regla se deduce de la comparacion de las fórmulas y en su consecuencia podemos escribir la fórmula general.

$$2S_n = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_5^{n-1} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - \sum_5^{n-2} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) \\ + \sum_5^{n-5} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) \\ - \sum_5^{n-4} a_x a_{x+4} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2} + \alpha_{x+3}) \dots + (-1)^n a_5 a_2 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 \dots \alpha_{n-1}) \quad (12)$$

18. Para demostrar la generalidad de la fórmula supongamos que es cierta para un polígono que tiene $(n-1)$ lados.

Tendremos por su ley la expuesta

$$2S_{n-1} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_5^{n-2} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - \sum_5^{n-5} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) + \\ + \sum_5^{n-4} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) \dots + (-1)^{n-1} a_5 a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots \alpha_{n-2}) \quad (15)$$

poniendo fuera de la característica todos los términos conteniendo las dos cantidades $a_{n-1} a_{n-2}$

$$2S_{n-1} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_5^{n-5} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x + a_{n-2} a_{n-1} \text{ sen. } \alpha_{n-2} \\ - \sum_5^{n-4} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) - a_{n-5} a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_{n-5} + \alpha_{n-2}) \\ + \sum_5^{n-5} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) + a_{n-4} a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_{n-4} + \alpha_{n-5} + \alpha_{n-2}) \\ \dots + (-1)^{n-1} a_5 a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 \dots \alpha_{n-2})$$

19. Si se imagina ahora un polígono de n lados (fig. 10.) y se representan los lados por

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n$$

y los ángulos por

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n$$

Tirando la diagonal AM se descompone en un polígono de $(n-1)$ lados y en un triángulo

Llamando S_{n-1} el área del polígono de $(n-1)$ lados y siendo S_5 el área del triángulo AMN

$$S_5 = \frac{1}{2} a_{n-1} a_n \text{ sen. } \alpha_{n-1}$$

El área del polígono propuesto será

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2} a_{n-1} a_n \text{ sen. } \alpha_{n-1}$$

multiplicando por 2

$$2S_n = 2S_{n-1} + a_{n-1} a_n \text{ sen. } \alpha_{n-1} \quad (14)$$

Llamemos r la longitud de la diagonal AM y s el ángulo que la misma forma con el lado a_{n-2} ω el ángulo que forma con el lado a_{n-1}

Por la fórmula (15) podemos determinar el área del polígono de $(n-1)$ lados y será

$$\begin{aligned}
 2 S_{n-1} &= a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^{n-3} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x + a_{n-2} r \text{ sen. } s \\
 &- \sum_3^{n-4} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) - a_{n-3} r \text{ sen. } (\alpha_{n-3} + s) \\
 &+ \sum_5^{n-5} a_x a_{x+5} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) + a_{n-4} r \text{ sen. } (\alpha_{n-4} + \alpha_{n-5} + s) \\
 &\dots + (-1)^{n-1} a_5 r \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \dots + s)
 \end{aligned} \quad (G)$$

de la cual se deben eliminar las cantidades $r s$

De la figura se tiene

$$s + \omega = \alpha_{n-2}$$

que dan

$$s = \alpha_{n-2} - \omega$$

tomando el seno y coseno del ángulo s se tendrá

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \alpha_{n-2} \cos. \omega - \cos. \alpha_{n-2} \text{ sen. } \omega$$

$$\cos. s = \cos. \alpha_{n-2} \cos. \omega + \text{sen. } \alpha_{n-2} \text{ sen. } \omega$$

Del triángulo AMN se tiene la relacion trigonométrica.

$$\text{sen. } \omega = \frac{a_n \text{ sen. } \alpha_{n-1}}{r}$$

$$\cos. \omega = \frac{a_{n-1} - a_n \cos. \alpha_{n-1}}{r}$$

Cuyos valores puestos en sen. s y cos. r y hechas las oportunas operaciones se tiene

$$r \text{ sen. } s = a_{n-1} \text{ sen. } \alpha_{n-2} - a_n \text{ sen. } (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) \quad (15)$$

$$r \cos. s = a_{n-1} \cos. \alpha_{n-2} - a_n \cos. (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) \quad (16)$$

Representando por ρ la suma de un cierto número de ángulos y desarrollando la expresión $r \text{ sen. } (\rho + s)$

$$r \text{ sen. } (\rho + s) = r \text{ sen. } \rho \cos. s + r \cos. \rho \text{ sen. } s$$

poniendo por $r \text{ sen. } s$ y $r \cos. s$ sus valores (15) (16) se tiene

$$\begin{aligned}
 r \text{ sen. } (\rho + s) &= \text{sen. } \rho [a_{n-1} \cos. \alpha_{n-2} - a_n \cos. (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})] + \\
 &\cos. \rho [a_{n-1} \text{ sen. } \alpha_{n-2} - a_n \cos. (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})]
 \end{aligned}$$

efectuando las multiplicaciones y las reducciones se tiene finalmente

$$r \text{ sen. } (\rho + s) = a_{n-1} \text{ sen. } (\rho + \alpha_{n-2}) - a_n \text{ sen. } (\rho + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) \quad (17)$$

sustituyendo en la fórmula (G) el valor de $r \text{ sen. } s$ y $r \text{ sen. } (\rho + s)$ poniendo sucesivamente

$$\rho = \alpha_{n-5}$$

$$\rho = \alpha_{n-4} + \alpha_{n-5}$$

$$\rho = \alpha_5 + \alpha_n \dots$$

Siendo

$$2S_{n-1} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^{n-5} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x + a_{n-2} [a_{n-1} \text{ sen. } \alpha_{n-2} - a_n \text{ sen. } (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})] - \\ - \sum_3^{n-4} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) - a_{n-3} [a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2}) - a_n (\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})] + \\ + \sum_3^{n-5} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) + a_{n-4} [a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_{n-4} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2}) \\ - a_n \text{ sen. } (\alpha_{n-4} + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})] \\ + (-1)^{n-1} a_3 [a_{n-1} \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}) - a_n \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1})]$$

desarrollando las multiplicaciones y reduciendo los términos análogos

$$2S_{n-1} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^{n-2} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x \\ - \sum_3^{n-2} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) + \sum_3^{n-5} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) - \\ + (-1)^n a_3 a_n \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1})$$

Y introduciendo este valor en la (14) y reduciendo el término $a_{n-1} a_n \text{ sen. } \alpha_{n-1}$ en la característica se tiene finalmente la fórmula general que se acaba de establecer por reinducción.

$$2S_n = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + \sum_3^{n-1} a_x a_{x+1} \text{ sen. } \alpha_x - \sum_3^{n-2} a_x a_{x+2} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1}) \\ + \sum_3^{n-5} a_x a_{x+3} \text{ sen. } (\alpha_x + \alpha_{x+1} + \alpha_{x+2}) \dots \\ + (-1)^n a_3 a_n \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1})$$

N. del T. Vemos que suponiendo que la fórmula era cierta para el polígono de $(n-1)$ lados se verifica también para el de n lados luego está probada su generalidad, pero que

verificándose para el triángulo polígono de tres lados se verificará por la misma regla anterior para el de $(5+1)$ lados, ó sea para el cuadrilátero y lo mismo para el pentágono etc. Este método de demostración se emplea muchas veces en el Álgebra.

Traducido del *Giornale dell'Ingegnere Architetto ed agronomo*.

(Se continuará).

MIGUEL CERVANTES.

ANTE-PROYECTOS DEL PLAN GENERAL DE FERRO-CARRILES.

(Continuación.)

Red del Este y su enlace con la del Nordeste.

Tienen por objeto las líneas que comprende esta red: las comunicaciones directas de Madrid con el Mediterráneo; la unión de las ricas comarcas en que se extiende con las del resto de la nación y con los principales puertos de aquella costa;

y sus enlaces con las redes del N. E. y del Mediodía.

Su tronco principal es el ferro-carril de Madrid á Alicante, que se halla en explotación, del cual parten: el ramal de Castillejo á Toledo; el de Almansa á Valencia (en explotación también); el de Alcázar de San Juan á Quintanar de la Orden, concedido recientemente; el de Albacete á Cartagena, del cual se explota ya la parte de Murcia á Cartagena, y de Chinchilla á Hellín. Además, se está construyendo una línea para caballerías, de Carcagente á Gandía y Dénia. Para unir esta red con la del Nordeste, existe la línea de la costa desde Valencia por Castellón á Tarragona (en explotación hasta Benicasin.)

Las capitales de provincia enlazadas hasta ahora con los ferro-carriles que pertenecen á ellas, son seis: Albacete, Alicante, Toledo, Valencia Mur-