

DE LA CUADRATURA DE LOS POLÍGONOS.

MEMORIA

del Ingeniero

DOMENICO TESSARI.

Lámina 38.

PREFACIO.

Entre las muchas é interesantes investigaciones de la Geometria, una de las más importantes para el ingeniero y que ha sido objeto de algunos estudios, es la cuadratura de los polígonos. Cuando se quiere determinar con toda exactitud el área de un polígono, como de un campo ó vasto territorio, es preciso recurrir á la descomposicion trigonométrica ó á alguna fórmula complicadísima. Por presentar cualquiera de estos dos métodos tantos inconvenientes, se prefiere el gráfico. Por muy delicado que sea el instrumento que se adopte, da siempre un cierto error, no ofreciendo nunca la exactitud del método analítico. Y no puede ser de otra manera. La recta trazada materialmente es una línea sinuosa, respecto á la recta matemática, el ángulo tomado con el trasportador difiere sensiblemente del arco matemático.

La fórmula que yo presento para la cuadratura da cualquier polígono, tiene á mi entender, sencillez, elegancia y se acomoda bien á la determinacion práctica del área de cualquier polígono, sin necesidad de dibujo ni de recta auxiliar.

Preliminar.

1 Un polígono está completamente determinado, cuando se conocen sus lados y sus ángulos.

gulos, y además la situacion de sus vértices. Por consiguiente, el área de cualquier polígono será una funcion de estos tres elementos, los lados, los ángulos y la disposicion de los vértices.

Supongamos conocidos los lados y los ángulos de un polígono y se trata de determinar la funcion general que expresa su área. Este es el problema de la cuadratura de los polígonos.

2 Indicaremos constantemente los lados del polígono recorriendo su perimetro, sucesivamente por $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n$, y los ángulos por $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n$ por $S_3 S_4 \dots S_{n-1} S_n$ indicaremos el área del triángulo del cuadrilátero del pentágono, etc., etc.

3 Es preciso recordar una importante relacion trigonométrica, la cual veremos usada frecuentemente.

La que se obtiene del teorema que los lados de un triángulo son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos. Llamando $a b c$ los lados $\alpha \beta \gamma$ los ángulos opuestos á estos lados tendremos

$$a : b :: \text{sen. } \alpha : \text{sen. } \beta$$

ó bien

$$\text{sen. } \alpha = \frac{a \text{ sen. } \beta}{b} \quad (A)$$

ó sea el seno del ángulo de un triángulo es igual al lado opuesto multiplicado por el seno de otro ángulo dividido todo por el lado opuesto á este último ángulo.

4 Poniendo el valor de sen. α en la relacion

$$\cos.^2 \alpha = 1 - \text{sen.}^2 \alpha$$

será

$$\cos.^2 \alpha = 1 - \frac{a^2 \text{ sen.}^2 \beta}{b^2} = \frac{b^2 - a^2 \text{ sen.}^2 \beta}{b^2} \quad (1).$$

Madrid 15 de Noviembre de 1864.

Por el teorema de Carnot se tiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. \delta$$

sustituyendo este valor de b^2 en el numerador de la (1) se tiene

$$\cos. ^2 \alpha = \frac{a^2 + c^2 - 2ac \cos. \delta - a^2 \text{sen.}^2 \delta}{b^2}$$

sacando a^2 factor comun

$$\cos. ^2 \alpha = \frac{c^2 - 2ac \cos. \delta + a^2 (1 - \text{sen.}^2 \delta)}{b^2}$$

y siendo

$$1 - \text{sen.}^2 \delta = \cos. ^2 \delta$$

tendremos

$$\cos. ^2 \alpha = \frac{c^2 - 2ac \cos. \delta + a^2 \cos. ^2 \delta}{b^2}$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ámbos miembros de esta igualdad

$$\cos. \alpha = \frac{c - a \cos. \delta}{b} \quad (B)$$

lo que dice que el coseno del ángulo de un triángulo es igual á uno de los lados adyacentes de ese ángulo disminuido del lado opuesto multiplicado por el coseno del ángulo que forman estos dos lados y todo dividido por el otro lado adyacente.

§ 1.º

Deducion de la fórmula.

5 *Area del triángulo.* El área del triángulo se obtiene multiplicando la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que estos dos lados forman. Llamando $a_1 a_2 a_3$ los lados y $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ los ángulos de un triángulo y h (fig. 4.º y 2.º) su altura, la superficie será

$$S_3 = \frac{1}{2} a_1 h.$$

La altura del triángulo tanto se toma sobre su base como sobre su prolongacion y será siempre

$$h = a_2 \text{sen. } \alpha_1$$

por lo que tendremos en general

$$S_3 = \frac{1}{2} a_1 a_2 \text{sen. } \alpha$$

lo que expresa que la superficie de un triángulo es la mitad del producto de los dos lados multiplicado por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Multiplicando por 2

$$2 S_3 = a_1 a_2 \text{sen. } \alpha_1 \quad (I).$$

6 *Area del cuadrilátero.* Un cuadrilátero es descomponible en dos triángulos, y aplicando la formula (I) se obtiene el área del cuadrilátero.

Supongamos el cuadrilátero AB CD (figura 5), sean $a_1 a_2 a_3 a_4$ sus lados; $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ sus ángulos tirando la recta AC el área del cuadrilátero será

$$S_4 = \text{sup. ABC} + \text{sup. ADC}$$

y en virtud de la (I)

$$2 S_4 = a_1 a_2 \text{sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{sen. } \alpha_3 \quad (II)$$

Si $\alpha_3 = 180^\circ$ el cuadrilátero se transforma en triángulo:

Si α_3 es mayor de 180° el cuadrilátero toma la figura AB CD y el área será

$$S_4 = \text{sup. ABC} - \text{sup. ADC}$$

y en virtud de la formula (I)

$$2 S_4 = a_1 a_2 \text{sen. } \alpha_1 - a_3 a_4 \text{sen. } (\text{ADC})$$

$$\text{sen. } (\text{ADC}) = \text{sen. } (360^\circ - \alpha_3) = - \text{sen. } \alpha_3$$

pero que sustituyendo en la anterior da

$$2 S_4 = a_1 a_2 \text{sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{sen. } \alpha_3$$

La formula (II) sirve pues para cualquier cuadrilátero.

7 *Corolario.* Si el cuadrilátero tiene los dos lados paralelos, es un trapecio (fig. 5); llamando h su altura se tiene

$$h = a_2 \text{sen. } \alpha_1$$

ó bien.

$$h = a_4 \cos. (\alpha_3 - 90^\circ) = a_4 \text{sen. } \alpha_3$$

introduciendo en la (II) el valor de h viene

$$2 S_4 = a_1 h + a_3 h$$

ó sea

$$S_4 = (a_1 + a_5) \frac{h}{2}$$

El área del trapecio se obtiene multiplicando la suma de las bases por la mitad de la altura.

8 *Area del pentágono.* Supongamos el pentágono AB CDE (fig. 6), y sus lados sean $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, sus ángulos $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$. Tirando la diagonal AD el pentágono queda descompuesto en el cuadrilátero AB CD y el triángulo ADE

La superficie del pentágono será

$$S_5 = \text{sup. AB CD} + \text{sup. ADE} \quad (2)$$

Sea r la longitud de la diagonal AD y ω el ángulo que esta forma con el lado a_4 : s el ángulo con el lado a_5 . Tendremos en virtud de la formula (II)

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \alpha_3 \frac{a_4 - a_5 \cos. \alpha_4}{r} - \cos. \alpha_3 \frac{a_5 \text{ sen. } \alpha_4}{r}$$

haciendo todas las multiplicaciones

$$r \text{ sen. } s = a_4 \text{ sen. } \alpha_3 - a_5 \text{ sen. } \alpha_3 \cos. \alpha_4 - a_5 \text{ sen. } \alpha_4 \cos. \alpha_3$$

y reduciendo

$$r \text{ sen. } s = a_4 \text{ sen. } \alpha_3 - a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4)$$

Puesto este valor en la (5) viene

$$2 \text{ sup. AB CD} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_5 [a_4 \text{ sen. } \alpha_3 - a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4)]$$

ó bien

$$2 \text{ sup. AB CD} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3 - a_3 a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4)$$

y siendo en virtud de la (I)

$$2 \text{ sup. ADE} = a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4$$

tendremos finalmente de la (2) el área del pentágono

$$2 S_5 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3 + a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4 - a_3 a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4) \quad (\text{III})$$

9 Si α_4 es mayor que 180° el triángulo cae dentro (fig. 7) del cuadrilátero y entonces la superficie del pentágono es

$$\text{Sup. AB CDE} = \text{sup. AB CD} - \text{sup. ADE} \quad (5)$$

Pero en tal caso tendremos

$$\alpha_3 = s - \omega$$

y por consiguiente

$$2 \text{ Sup. AB CD} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 r \text{ sen. } s \quad (5)$$

De la cual se debe eliminar $r \text{ sen. } s$

Siendo

$$\omega + s = \alpha_3$$

se tendrá

$$s = \alpha_3 - \omega$$

y de aquí

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \alpha_3 \cos. \omega - \text{sen. } \omega \cos. \alpha_3 \quad (4)$$

Aplicando las dos relaciones (A) (B) al triángulo ADE se tendrá

$$\text{sen } \omega = \frac{a_5 \text{ sen. } \alpha_4}{r}$$

$$\cos \omega = \frac{a_4 - a_5 \cos. \alpha_4}{r}$$

y poniendo este valor en la (4)

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \alpha_3 \cos. \omega + \cos. \alpha_3 \text{ sen. } \omega$$

y en virtud de las relaciones (A) (B)

$$\text{sen. } \omega = \frac{a_5 \text{ sen. } (360^\circ - \alpha_4)}{r} = -\frac{a_5 \text{ sen. } \alpha_4}{r}$$

$$\cos. \omega = \frac{a_4 - a_5 \cos (560^\circ - \alpha_4)}{r} = \frac{a_4 - a_5 \cos. \alpha_4}{r}$$

Poniendo estos valores en sen. s y haciendo las correspondientes deducciones se tendrá

$$r \text{ sen. } s = a_4 \text{ sen. } \alpha_5 - a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4)$$

Que dá por la (II)

$$2 \text{ sup. AB CD} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_5 a_4 \text{ sen. } \alpha_5 - a_4 a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4)$$

y por la (I)

$$2 \text{ sup. ADE} = a_4 a_5 \text{ sen. } (560^\circ - \alpha_4) = -a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4$$

Puestos estos dos valores en la formula (5) se tiene precisamente la formula (III)

10 Supongamos que la diagonal no divida al pentágono en el cuadrilátero y en el triángulo. Fácil es ver que (fig. 3) aun en este caso subsiste la formula (III)

Será

$$S_5 = \text{sup. ADE} + \text{sup. ABO} - \text{sup. DCO} \quad (6) \quad \text{Sup. DCO} = \text{sup. ADC} - \text{sup. ACO}$$

Pero se tiene de la figura 3 que

$$\text{Sup. ABO} = \text{sup. ABC} - \text{sup. ACO}$$

restando de la primera la segunda dará

$$\text{Sup. ABO} - \text{sup. DCO} = \text{sup. ABC} - \text{sup. ADC} \quad (7)$$

Aplicando á los dos triángulos ABC y ADC la formula (I)

$$2 \text{ sup. ABC} = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1$$

$$2 \text{ sup. ADC} = a_5 r \text{ sen. } s$$

En este caso se tendrá

$$s = \omega - \alpha_5$$

y por consiguiente

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \omega \cos. \alpha_5 - \cos. \omega \text{ sen. } \alpha_5$$

poniendo los valores de sen. ω y cos. ω que antes hemos deducido.

$$\text{sen } s = \cos. \alpha_5 \frac{a_5 \text{ sen. } \alpha_4}{r} - \text{sen } \alpha_5 \frac{a_4 - a_5 \cos. \alpha_4}{r}$$

multiplicando por r toda la ecuacion y reduciendo

$$r \text{ sen. } s = a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) - a_4 \text{ sen. } \alpha_5$$

lo que dá

$$2 (\text{sup. ABC} - \text{sup. ADC}) = a_5 a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) - a_5 a_4 \text{ sen. } \alpha_5$$

Puesto este valor en la (7)

$$2 (\text{sup. ABO} - \text{sup. DCO}) = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 - a_5 a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) + a_5 a_4 \text{ sen. } \alpha_5$$

y siendo

$$2 \text{ sup. ADE} = a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4$$

tendremos finalmente por la formula (6) el área del pentágono

$$2 S_5 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_5 a_4 \text{ sen. } \alpha_4 + a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4 - a_5 a_5 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4)$$

Queda pues demostrado que la formula (III) sirve para cualquier pentágono

11 Ejemplo 1. Sea $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = l$ Tomando los senos de los ángulos se tiene
 $a_5 = 2l$ los lados y $\alpha_1 = 90^\circ$ $\alpha_5 = 144^\circ 44'$
 $\alpha_4 = 60^\circ$ los ángulos del pentágono. $\text{sen. } \alpha_1 = \text{sen. } (90^\circ) = l$

$$\text{sen. } \alpha_5 = \text{sen. } (144^\circ 44') = \text{sen. } (55^\circ 16') = 0,5774$$

$$\text{sen. } \alpha_4 = \text{sen. } (60^\circ) = 0,8660$$

$$\text{sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) = \text{sen. } (204^\circ 44') = -\text{sen. } (24^\circ 44') = -0,4184$$

sustituyendo estos valores en la fórmula (III)

$$2 S_5 = l^2 + l^2 \times 0,5774 + 2 l^2 \times 0,8660 + 2 l^2 \times 0,4184$$

efectuando las operaciones

$$2 S_5 = l^2 \times 4,1462$$

$$S_5 = l^2 \times 2,0731$$

12. Area del exágono. Supongamos el exágono AB CDE F (fig. 9), $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ sus lados, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$ sus ángulos.

La diagonal AE descompone el exágono en el pentágono AB CDE y el triángulo AEF; por

consiguiente la superficie.

$$S_6 = \text{sup. AB CDE} + \text{sup. AEF} \quad (8)$$

Llamamos, como antes, r la longitud de la diagonal s el ángulo con el lado a_4 ; ω el ángulo con el lado a_5 , tendremos en virtud de la fórmula (III)

$$2 \text{ sup. AB CDE} = a_1 a_2 \text{sen. } \alpha_1 + a_5 a_4 \text{sen. } \alpha_5 + a_4 r \text{sen. } s - a_5 r \text{sen. } (\alpha_5 + s) \quad (9)$$

de la cual debemos eliminar r s

De la figura se tiene

$$s + \omega = \alpha_4$$

de donde

$$s = \alpha_4 - \omega$$

$$\text{sen. } s = \text{sen. } \alpha_4 \cos. \omega - \cos. \alpha_4 \text{sen. } \omega \quad (10)$$

y tambien

$$\cos. s = \cos. \alpha_4 \cos. \omega + \text{sen. } \alpha_4 \text{sen. } \omega \quad (11)$$

Pero del triángulo AEF resulta por las dos relaciones (A) (B)

$$\text{sen. } \omega = \frac{a_6 \text{sen. } \alpha_5}{r}$$

$$\cos. \omega = \frac{a_5 - a_6 \text{sen. } \alpha_5}{r}$$

Puestos estos valores en la (10) (11) y hechas las reducciones se tiene:

$$r \text{sen. } s = a_5 \text{sen. } \alpha_4 - a_6 \text{sen. } (\alpha_4 + \alpha_5)$$

$$r \cos. s = a_5 \cos. \alpha_4 - a_6 \cos. (\alpha_4 + \alpha_5)$$

Ahora desarrollando la expresión

$$r \text{sen. } (\alpha_5 + s)$$

se tiene:

$$r \text{sen. } (\alpha_5 + s) = r \text{sen. } \alpha_5 \cos. s + r \cos. \alpha_5 \text{sen. } s$$

poniendo aqui en vez de $r \text{sen. } s$ y $r \cos. s$ sus valores se tiene:

$$r \text{sen. } (\alpha_5 + s) = \text{sen. } \alpha_5 \{ a_5 \cos. \alpha_4 - a_6 \cos. (\alpha_4 + \alpha_5) \} + \cos. \alpha_5 \{ a_5 \text{sen. } \alpha_4 - a_6 \text{sen. } (\alpha_4 + \alpha_5) \}$$

efectuando las multiplicaciones y las reducciones.

$$r \text{sen. } (\alpha_5 + s) = a_5 \text{sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) - a_6 \text{sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

Poniendo los valores de $r \text{sen. } s$ y $r \text{sen. } (\alpha_5 + s)$ en la (9) y efectuando todas las multiplicaciones se tiene:

$$2 \text{ sup. } ABCDE = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3 + a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4 - a_4 a_6 \text{ sen. } (\alpha_4 + \alpha_5) - \\ - a_5 a_6 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4) + a_5 a_6 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

y siendo

$$2 \text{ sup. } AEF = a_5 a_6 \text{ sen. } \alpha_5$$

se tiene finalmente el área del exágono de la (8)

$$2 S_6 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3 + a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4 + a_5 a_6 \text{ sen. } \alpha_5 - a_3 a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_5) \\ - a_4 a_6 \text{ sen. } (\alpha_4 + \alpha_5) + a_5 a_6 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5) \quad (IV)$$

Para demostrar la generalidad de esta fórmula se repite todo cuanto se ha dicho en el pentágono.

15. *Corolario.* En el exágono regular

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = l$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 120^\circ$$

además siendo

$$\text{sen. } \alpha_1 = \text{sen. } \alpha_2 = \dots = \text{sen. } \alpha_6 = \text{sen. } (120^\circ) = \text{sen. } (60^\circ) = 0,8660$$

$$\text{sen. } (\alpha_3 + \alpha_4) = \text{sen. } (\alpha_4 + \alpha_5) = \text{sen. } (240^\circ) = -\text{sen. } (60^\circ) = -0,8660$$

$$\text{sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5) = \text{sen. } (560^\circ) = 0$$

la fórmula general viene á reducirse á

$$2 S_6 = 4 l^2 \times 0,8660 + 2 l^2 \times 0,8660$$

ó bien

$$S_6 = l^2 \times 2,598$$

ó sea el área del exágono regular se obtiene multiplicando el enadrado del lado por la constante 2,598

14. Análogamente se procederá para obtener el área del polígono de siete lados, tirando la

diagonal y descomponiéndole en un exágono y su triángulo, y aplicando á estas dos figuras las fórmulas correspondientes.

Eliminando del área del exágono la diagonal r y el ángulo que esta forma con el lado a_5 y sumando á esta área la del triángulo se tendrá:

$$2 S_7 = a_1 a_2 \text{ sen. } \alpha_1 + a_3 a_4 \text{ sen. } \alpha_3 + a_4 a_5 \text{ sen. } \alpha_4 + a_5 a_6 \text{ sen. } \alpha_5 + a_6 a_7 \text{ sen. } \alpha_6 \\ - a_3 a_5 \text{ sen. } (\alpha_3 + \alpha_4) - a_4 a_6 \text{ sen. } (\alpha_4 + \alpha_5) - a_5 a_7 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_6) \\ + a_5 a_6 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5) + a_4 a_7 \text{ sen. } (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) \\ - a_5 a_7 \text{ sen. } (\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) \quad (V)$$

15. *Corolario.* En el polígono regular de siete lados todos los ángulos y los lados son iguales. Llamando l la longitud de los lados, los ángulos sabemos que todos son iguales á $128^\circ 54' - 17''$ y por consiguiente

$$\text{sen. } (128^\circ 54' - 17'') = \text{sen. } (51^\circ 25' 45'') = 0,7818$$

$$\text{sen. } (257^\circ 8' 54'') = -\text{sen. } (77^\circ 8' 54'') = -0,9749$$

$$\text{sen. } (585^{\circ}42'51'') = \text{sen. } (25^{\circ}-42'51'') = 0,459$$

$$\text{sen. } (514^{\circ}17'8'') = \text{sen. } (25^{\circ}42'51'') = 0,4559.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (V) se tiene despues de practicar todas las operaciones indicadas

$$S_7 = l^2 \times 5,6558$$

el área del polígono regular de siete lados se obtiene pues multiplicando el cuadrado del lado por la constante 5,6558

Traducido del *Giornale dell'Ingegnere Architetto ed agrónomo*.

(Se continuará).

MIGUEL CERVANTES.

ANTE-PROYECTOS

DEL

PLAN GENERAL DE FERRO-CARRILES.

(Continuacion.)

DESCRIPCION

DE LAS REDES PARCIALES QUE FORMAN LA GENERAL
DE LOS FERRO-CARRILES DE LA PENÍNSULA.

Red del Norte.

Las líneas que constituyen esta red, tienen por objeto proporcionar fáciles salidas del centro de la Península al mar Cantábrico, y contribuir eficazmente al fomento de los intereses de casi todas las provincias de Castilla la Vieja y las Vascongadas, uniéndolas entre sí, con la corte y con el vecino imperio. La principal de ellas es el ferro-carril llamado del Norte, que partiendo de Madrid, sigue por Avila, Valladolid, Burgos, Vitoria, San Sebastian hasta Irún. De él se deriva un ramal desde Medina del Campo á Zamora, y otro desde Venta de Baños á Santander; los cuales, así como la línea general, están casi totalmente en explotación. También se considera como parte de esta red de ferro-carril, el trozo ya terminado de Tudela á Bilbao, comprendido entre Miranda y este punto, y el ramal que se ha concedido recientemente, desde Medina del Campo á Salamanca; así como otros dos de poca importancia, uno en la línea de Palencia á Santander, y otro de las minas de Triano á la ría de Bilbao.

Con estos ferro-carriles, que, como se deja indicado, tocan ya á su terminación, están servidos, á juicio de la Junta, los intereses de las diez provincias cuyas capitales enlazan, y atendidas prudentemente, por ahora, las necesidades comerciales de las comarcas que recorren, y las que provienen de sus relaciones con el resto del país, así

como los intereses generales de éste en lo que se refiere á sus comunicaciones con las mismas provincias y con los puertos del Océano Cantábrico.

Pero bajo este último aspecto, la línea principal, ó sea el ferro-carril del Norte, no llena cumplidamente su primordial objeto; tanto porque su trazado ofrece un trayecto más largo del que debiera desde Madrid á Valladolid, con notable perjuicio de todas las comarcas cuyos ferro-carriles concurren en aquel punto, y de las procedencias de Madrid para el mismo, cuanto porque deja desatendida la provincia de Segovia, cuya riqueza exige una vía principal de comunicación que le dé vida y movimiento; lo cual no se conseguirá ciertamente con un ramal de Segovia á Sanchidrian, al Escorial, ó á otro punto intermedio, porque sus fuerzas productivas y sus elementos de tráfico no se reconcentran seguramente en la capital de la provincia; ni tampoco se la serviría cual conviene con otros ramales hacia Aranda y Burgos, por ser muy escasa la importancia de su territorio en tales direcciones.

Además, el Real Sitio de San Ildefonso, que en las épocas de jornada en el verano llama á sí gran concurrencia de la Corte, hasta el punto que sería lícito decir, sin incurrir en exageración, que podrá ser el *Versalles* español, motiva bien un ferro-carril directo de Madrid á Segovia, cuya cercanía á dicho sitio le presenta con aventajada disposición para atraer también mucha gente de la Corte durante el estío; porque con el ramal de Sanchidrian, ó otro derivado desde Navalperal, quedarían tan mal servidos aquellos puntos, como ahora mismo puede conocerse por los entorpecimientos, incomodidades y dilaciones que son inherentes á la explotación de otros ramales semejantes.

Estas consideraciones hubieran bastado para incluir en el plan la línea directa de Madrid á Valladolid por Segovia; pero hay una razón más para hacerlo, y es, que su concesión está autorizada por la ley de 11 de julio de 1856, con subvención de la provincia de Segovia; y no hay razón alguna para dejar de cumplir esta ley, que además se halla muy de acuerdo con los intereses generales del país.

El proyecto de este ferro-carril se ha presen-

MEMORIA SOBRE LA CUADRATURA DE LOS POLIGONOS

