

HOËNE WRONSKI.

(Conclusion.)

Falta ahora tan solo determinar directamente en funcion de $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ & los elementos $F(\mu)$ y $\Psi(\mu)_\rho$ que componen los coeficientes A_μ .

Para esto observaremos, que todas las funciones que entran en ellos son cocientes de la

forma $\frac{\Delta\left(\frac{P}{R}\right)}{\Delta\left(\frac{Q}{R}\right)}$ cuya espresion vamos á encontrar

$$\Delta\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{P}{R} - \frac{P-\Delta P}{R-\Delta R} = \frac{R\Delta P - P\Delta R}{R(R-\Delta R)}$$

$$\Delta\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{P+\Delta P}{R+\Delta R} - \frac{P}{R} = \frac{R\Delta P - P\Delta R}{R(R+\Delta R)}$$

la primera sirve para las diferencias regresivas y la segunda para las progresivas y reuniéndola en una sola fórmula

$$\Delta\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{R\Delta P - P\Delta R}{R(R \mp \Delta R)} = \frac{\Delta R \Delta P - \Delta P \Delta R}{R(R \mp \Delta R)} = \frac{\varpi[\Delta \epsilon_1 R \Delta \epsilon_2 P]}{R(R \mp \Delta R)}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{P}{R}\right)}{\Delta\left(\frac{Q}{R}\right)} = \frac{\varpi[\Delta \epsilon_1 R \Delta \epsilon_2 P]}{\varpi[\Delta \epsilon_1 R \Delta \epsilon_2 Q]}$$

Sea en primer lugar:

$$P = \Omega_\rho, R = \Omega_0 = 1, Q = \Omega_1$$

$$\Omega(1)_\rho = \frac{\Delta\left(\frac{\Omega_\rho}{\Omega_0}\right)}{\Delta\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\right)} = \frac{\varpi[\Delta \epsilon_1 \Omega_\rho \Delta \epsilon_2 \Omega_1]}{\varpi[\Delta \epsilon_1 \Omega_0 \Delta \epsilon_2 \Omega_1]} = \frac{X_\rho}{X_1}$$

y como caso particular

$$\Omega(1)_2 = \frac{\varpi[\Delta \epsilon_1 \Omega_\rho \Delta \epsilon_2 \Omega_2]}{\varpi[\Delta \epsilon_1 \Omega_0 \Delta \epsilon_2 \Omega_1]} = \frac{X_2}{X_1}$$

Del mismo modo

$$\Omega(2)_\rho = \frac{\Delta\Omega(1)_\rho}{\Delta\Omega(1)_2} = \frac{\Delta\left(\frac{X_\rho}{X_1}\right)}{\Delta\left(\frac{X_2}{X_1}\right)} = \frac{\varpi[\Delta \epsilon_1 X_\rho \Delta \epsilon_2 X_1]}{\varpi[\Delta \epsilon_1 X_2 \Delta \epsilon_2 X_1]} = \frac{X(1)_\rho}{X(1)_2}$$

Tomo X.

Madrid 15 de Diciembre de 1862.

teniendo en cuenta lo mismo para este caso que para el anterior y los que siguen las fórmulas (24).

De una manera análoga hallaremos

$$\Omega(3)_p = \frac{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(1)_p \Delta^{\delta_2} X(1)_2] X(2)_p}{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(1)_2 \Delta^{\delta_2} X(1)_2]} = \frac{X(2)_p}{X(2)_2}$$

y en general

$$\Omega(\mu)_p = \frac{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(\mu-2)_p \Delta^{\delta_2} X(\mu-2)_{\mu-1}]}{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(\mu-2)_{\mu-1} \Delta^{\delta_2} X(\mu-2)_{\mu-1}]} = \frac{X(\mu-1)_p}{X(\mu-1)_{\mu}}$$

Pero segun el corolario (35) cambiando μ en $\mu-2$

$$\Omega(\mu)_p = \frac{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(\mu-2)_p \Delta^{\delta_2} X(\mu-2)_{\mu-1}]}{\varpi[\Delta^{\delta_1} X(\mu-2)_{\mu-1} \Delta^{\delta_2} X(\mu-2)_{\mu-1}]} =$$

$$\frac{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \dots \Delta^{\delta(\mu-1)} \Omega_{\mu-1} \Delta^{\delta(\mu)} \Omega_p]}{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \dots \Delta^{\delta(\mu-1)} \Omega_{\mu-1} \Delta^{\delta(\mu)} \Omega_{\mu}]}$$

Si en esta fórmula cambiamos Ω_p en $F(x)$ tendremos la expresión de $F(\mu)$ que se ha formado de la misma manera

$$F(\mu) = \frac{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \dots \Delta^{\delta(\mu-1)} \Omega_{\mu-1} \Delta^{\delta(\mu)} F(x)]}{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \dots \Delta^{\delta(\mu-1)} \Omega_{\mu-1} \Delta^{\delta(\mu)} \Omega_{\mu}]}$$

sustituyendo á estas notaciones las que usa Wronski llamando $\Phi(z)_\omega$ á $\Omega(z)_p$ y Ξ_ω á $F(\omega)$ y poniendo en vez de δ_0, δ_1 , etc. sus valores

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \Xi_\omega &= \frac{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \Delta^{\delta_2} \Omega_2 \dots \Delta^{\delta(\omega-1)} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\delta(\omega)} F(x)]}{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \Delta^{\delta_1} \Omega_1 \dots \Delta^{\delta(\omega-1)} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\delta(\omega)} \Omega_\omega]} \\ \Phi(z)_\omega &= \frac{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \dots \Delta^{\delta(\omega-1)} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\delta(\omega)} \Omega_p]}{\varpi[\Delta^{\delta_0} \Omega_0 \dots \Delta^{\delta(\omega-1)} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\delta(\omega)} \Omega_\omega]} \\ \Psi(\mu)_\nu &= - \left\{ \Phi(\mu+\nu)_\mu + \Psi(\mu)_1 \Phi(\mu+\nu) + \dots + \Psi(\mu)_{\nu-1} \Phi(\mu+\nu)_{\mu+\nu-1} \right. \\ \Lambda_\mu &= \Xi_\mu + \Psi(\mu)_1 \Xi_{\mu+1} + \Psi(\mu)_2 \Xi_{\mu+2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Antes de determinar directamente el valor de $\Psi(\mu)_\nu$ en función de $\Phi(z)_\omega$ sin pasar por los valores anteriores vamos á simplificar las fórmulas (41).

Desarrollemos por la fórmula (5) las funciones ϖ con relación á las diferencias sucesivas de la primera función Ω_0 ; y siendo $\Omega_0=1$

$$\Delta^0 \Omega_0 = 1, \Delta^1 \Omega_0 = 0, \Delta^2 \Omega_0 = 0 \dots \&$$

de manera que solo quedará un término en las funciones Ψ y

$$(42) \Phi(\rho)_{\omega} = \frac{\Psi[\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\omega} \Omega_{\rho}]}{\Psi[\Delta^1 \Omega_1 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\omega} \Omega_{\omega}]}$$

$$(43) \Xi_{\omega} = \frac{\Psi[\Delta^1 \Omega_1 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\omega} F(x)]}{\Psi[\Delta^1 \Omega_1 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^{\omega} \Omega_{\omega}]}$$

También haremos observar cuando $\rho = \omega$, $\Phi(\rho) = 1$ y cuando $\rho < \omega$ $\Phi(\rho)_{\omega} = 0$.

Lo primero es evidente por sí mismo. En cuanto a lo segundo, supongamos colocadas las funciones por su orden y Ω_{ρ} la última, los coeficientes $1.2.5 \dots \omega$ también por su orden; si $\rho < \omega$, habrá en las demás funciones $\Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_{\omega-1}$ una que será igual a Ω_{ρ} . Al permutar los exponentes ω y ρ dejando a los demás invariables, se introducen en el orden un número impar de variaciones, y por lo tanto cambia de signo el término, quedando su va-

lor igual por la igualdad de las dos funciones Ω_{ρ} : si ahora en cada permutación de estos dos exponentes ω y ρ permutamos todas las demás, las variaciones introducidas serán en número par o cero; luego siempre habrá para cada término otro igual y de signo contrario, destruyéndose todos dos a dos.

Teniendo esto en cuenta, no hay inconveniente en poner las ecuaciones (56, 57, 58 etc.) bajo la forma siguiente:

$$\begin{cases} -\Phi(\mu+1)_{\mu} = \Psi(\mu)_1 \Phi(\mu+1)_{\mu+1} + \Psi(\mu)_2 \Phi(\mu+1)_{\mu+2} \dots + \Psi(\mu)_{\nu} \Phi(\mu+1)_{\mu+\nu} \\ -\Phi(\mu+2)_{\mu} = \Psi(\mu)_1 \Phi(\mu+2)_{\mu+1} + \Psi(\mu)_2 \Phi(\mu+2)_{\mu+2} \dots + \Psi(\mu)_{\nu} \Phi(\mu+2)_{\mu+\nu} \\ \vdots \\ -\Phi(\mu+\nu)_{\mu} = \Psi(\mu)_1 \Phi(\mu+\nu)_{\mu+1} + \Psi(\mu)_2 \Phi(\mu+\nu)_{\mu+2} \dots + \Psi(\mu)_{\nu} \Phi(\mu+\nu)_{\mu+\nu} \end{cases}$$

y por la regla de Cramer

$$(44) \Psi(\mu)_{\nu} = - \frac{\Psi[\Phi(\mu+\epsilon_1)_{\mu+1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_2)_{\mu+2} \dots \Phi(\mu+\epsilon_{\nu-1})_{\mu+\nu-1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_{\nu})_{\mu}]}{\Psi[\Phi(\mu+\epsilon_1)_{\mu+1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_2)_{\mu+2} \dots \Phi(\mu+\epsilon_{\nu-1})_{\mu+\nu-1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_{\nu})_{\mu+\nu}]}$$

poniendo la señal ϵ a los índices que deban permutarse.

Todavía se puede simplificar la ecuación anterior: desarrollando el denominador según la fórmula (5) con relación al índice ϵ , se reduce a la unidad y

$$(45) \Psi(\mu)_{\nu} = - \Psi[\Phi(\mu+\epsilon_1)_{\mu+1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_2)_{\mu+2} \dots \Phi(\mu+\epsilon_{\nu-1})_{\mu+\nu-1} \cdot \Phi(\mu+\epsilon_{\nu})_{\mu}]$$

será en definitiva la fórmula que da el elemento $\Psi(\mu)_{\nu}$, cuya forma entera era fácil de prever y se deduciría de las ecuaciones (56) (57) (58) etc. por medio de sustituciones sucesivas.

En el desarrollo de la función $\Psi(\mu)_{\nu}$ resultarán muchos términos cero, cuyo procedimiento de eliminación no damos por no alargar demasiado este artículo.

Hace observar Wronski no ser posible encontrar otra fórmula mas general para el desarrollo de una función, por ser arbitrarias tanto las funciones que entran en él, como las diferencias; de manera que todas las formas particulares estarán comprendidas en ella, y así no hay necesidad de establecer á priori la forma como se practicaba en la de Maclaurin. Wronski, sin embargo, no se limita á esta reflexión, y deduce directamente la forma general que hemos supuesto, y determina las condiciones negativas de la fórmula, ó en qué

casos particulares no es aplicable; pero esta discusión de un interés secundario, la eliminamos por las mismas razones que nos han precisado á suprimir otras partes de su trabajo.

Pasemos ahora á aplicar esta fórmula, á deducir algunas de las empleadas en el desarrollo de las funciones, y aunque la de Maclaurin es uno de los casos mas particulares, la deduciremos la primera por ser la mas conocida, y así podrá apreciarse desde luego la importancia de la ley universal.

$$\text{Sea } \Omega_0=1; \Omega_1=x^1; \Omega_2=x^2 \dots \Omega_\mu=x^\mu$$

Calcularemos primero la función

$$\Psi \left[\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^\omega \Omega_\omega \right]$$

desarrollando con relación á las Δ sucesivas de Ω_1 , todos los términos que siguen al primero se reducen á cero por ser

$$\Delta^2 \Omega_1=0; \Delta^3 \Omega_1=0 \dots \Delta^\omega \Omega_1=0$$

y queda la función reducida á

$$(-1)^2 \Delta^1 \Omega_1 \Psi \left[\Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^\omega \Omega_\omega \right]$$

desarrollando de la misma manera la función Ψ observando que

$$\Delta^3 \Omega_2=0; \Delta^4 \Omega_2=0 \dots \&$$

$$(-1)^2 (-1)^2 \Delta^1 \Omega_1 \Psi \left[\Delta^3 \Omega_3 \dots \Delta^\omega \Omega_\omega \right]$$

y continuando de la misma manera

$$\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^\omega \Omega_\omega.$$

De un modo análogo desarrollaremos la función

$$\Psi \left[\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^\omega F(x) \right]$$

que la podremos reducir á

$$\Delta^1 \Omega_1 \Delta^2 \Omega_2 \dots \Delta^{\omega-1} \Omega_{\omega-1} \Delta^\omega F(x) :$$

entonces

$$\Xi_\mu = \frac{\Delta^\mu F(x)}{\Delta^\mu \Omega_\mu} = \frac{\Delta^\mu F(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu (\Delta x)^\mu}$$

Falta ahora determinar el valor de $\Psi(\mu)_v$.

En la forma que antes hicimos reduciremos la funcion al producto

$$\Psi(\mu)_v = - \Psi \left(\Phi(\mu+\delta_1)_{\mu+1} \cdot \Phi(\mu+\delta_2)_{\mu+2} \cdot \dots \cdot \Phi(\mu+\delta_{v-1})_{\mu+v-1} \cdot \Phi(\mu+\delta_v)_v \right)$$

y en definitiva á

$$\Psi(\mu)_v = - \Psi(\mu+\delta_v)_\mu$$

por ser la unidad las demas funciones.

Sustituyendo en (42) μ en vez de ω y $\mu+v$ en vez de ρ , y efectuando iguales transformaciones á las anteriores tendremos en definitiva

$$\Psi(\mu)_v = - \frac{\Delta^\mu \cdot \Omega_{\mu+v}}{\Delta^\mu \Omega_\mu} = - \frac{\Delta^\mu \cdot (x^{\mu+v})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu (\Delta x)^\mu}$$

la cual da

$$A_\mu = \frac{1}{1^{\mu+1} (\Delta x)^\mu} \left\{ \Delta^\mu \dot{F} x - \Delta^\mu (x^{\mu+1}) \frac{\Delta^{\mu+1} F(x)}{\mu+1} - \Delta^\mu (x^{\mu+2}) \times \frac{\Delta^{\mu+2} F(x)}{(\mu+1)(\mu+2)} - \dots \right\}$$

haciendo en esta expresion $x=0$.

No teniendo mas objeto que llegar á la fórmula de Taylor, no desarrollaremos los valores de $\Delta^\mu (x^{\mu+v})$ contentándonos con hacer observar son de la forma $M_v (\Delta x)^{\mu+v}$ siendo M_v una cantidad finita, y el valor de A_μ se convierte entonces en

$$A_\mu = \frac{1}{1^{\mu+1} \Delta x} \left\{ \Delta^\mu \dot{F}(x) - M_1 \Delta x - \Delta^{\mu+1} \dot{F}(x) - M_2 (\Delta x)^2 \Delta^{\mu+2} F(x) - \dots \right\};$$

y haciendo $\Delta x = dx$.

$$A_\mu = \frac{d^\mu F x}{1^{\mu+1} dx^\mu}$$

La misma fórmula nos hace ver en que casos es aplicable el teorema de Taylor, siendo preciso que

$$(dx)^\nu d^{\mu+\nu} F x = 0$$

para todos los valores de μ y de ν desde 0 á 8.

Queda, pues, demostrado, segun pretendia Wronski, que las diferencias ó diferenciadas son las que constituyen los elementos de los coeficientes del desarrollo de Taylor, y que nunca por las funciones resultantes se podrá explicar el cálculo infinitesimal.

Wronski deduce de una manera análoga cuantas fórmulas se conocen para el desarrollo de las funciones; por ahora nos limitaremos á establecer la relativa al desarrollo segun las funciones denominadas facultades, y que si bien pudiera deducirse con igual facilidad de la general, la vamos á demostrar directamente para presentar el genio de Wronski bajo todos sus aspectos. Habiendo hecho uso de dicha fórmula en su Critica de las funciones analíticas de Lagrange, se le hizo la objecion de faltar la demostracion de las fórmulas empleadas, y entonces dió la siguiente notable por su sencillez y claridad, y cuyo método de deducción no difiere del general.

Establezcamos la série

$$(46) \quad F(x) = A_0 + A_1 \varphi x^1 | \xi + A_2 \varphi x^2 | \xi + A_3 \varphi x^3 | \xi + \dots$$

y tomemos las diferencias

$$(46) \quad \begin{cases} \Delta F(x) = A_1 \Delta \varphi x^1 | \xi + A_2 \Delta \varphi x^2 | \xi + A_3 \Delta \varphi x^3 | \xi + \dots \\ \Delta^2 F(x) = A_1 \Delta^2 \varphi x^1 | \xi + A_2 \Delta^2 \varphi x^2 | \xi + A_3 \Delta^2 \varphi x^3 | \xi + \dots \\ \dots \end{cases}$$

dando en ellas á la variable el valor que hace á $\varphi(x)=0$.

Observaremos que

$$\Delta^\mu \varphi(x)^{\omega | \xi} = 0$$

siempre que $\mu < \omega$. En efecto, se sabe que para las diferencias regresivas

$$(47) \quad \Delta^\mu \varphi(x)^{\omega | \xi} = (-1)^\mu \left\{ \varphi(x - \mu \xi)^{\omega | \xi} - \frac{\mu}{1} \varphi(x - (\mu - 1) \xi)^{\omega | \xi} + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} \varphi(x - (\mu - 2) \xi)^{\omega | \xi} - \dots \right\}$$

siendo en general

$$\varphi(x - \lambda \xi)^{\omega | \xi} = \varphi(x - \lambda \xi) \varphi(x - (\lambda - 1) \xi) \dots \varphi(x - (\lambda - \omega + 1) \xi)$$

En esta espresion habrá siempre un factor $\varphi(x)$ cuando $\omega > \lambda$; luego cuando $\omega > \mu$ todos los términos de (46) contendrán á dicho factor y se reducirán á cero cuando $\varphi x = 0$.

Con esta indicacion las ecuaciones (46) se reducen á

$$\begin{cases} \Delta F(x) = A_1 \Delta \varphi x \\ A^2 F(x) = A_1 \Delta^2 \varphi x + A_2 \Delta^2 \varphi x^1 | \xi \\ \Delta^3 F(x) = A_1 \Delta^3 \varphi x + A_2 \Delta^3 \varphi x^1 | \xi + A_3 \Delta^3 \varphi x^2 | \xi \\ \vdots \\ \Delta^\mu F(x) = A_1 \Delta^\mu \varphi x + A_2 \Delta^\mu \varphi x^1 | \xi + \dots + A_\mu \Delta^\mu \varphi x^{\mu-1} | \xi \end{cases}$$

Completándolas para que cada una tenga μ términos y aplicando la regla de Cramer

$$A_\mu = \frac{\varpi \begin{bmatrix} \Delta^1 \varphi x \Delta^2 \varphi x^2 | \xi \Delta^3 \varphi x^3 | \xi \dots \Delta^\mu F(x) \end{bmatrix}}{\varpi \begin{bmatrix} \Delta^1 \varphi x \Delta^2 \varphi x^2 | \xi \dots \Delta^\mu \varphi x^{\mu-1} | \xi \end{bmatrix}};$$

y desarrollando la funcion ϖ inferior se obtendrá definitivamente

$$A_\mu = \frac{\varpi \begin{bmatrix} \Delta^1 \varphi x^1 | \xi \Delta^2 \varphi x^2 | \xi \dots \Delta^{\mu-1} \varphi x^{\mu-1} | \xi \Delta^\mu F(x) \end{bmatrix}}{\Delta \varphi x^1 | \xi \Delta^2 \varphi x^2 | \xi \dots \Delta^\mu \varphi x^{\mu-1} | \xi}$$

en cuyo desarrollo entran muchos términos que se reducen á cero.

Supongamos que la $\varphi(x)$ es la misma variable x , en cuyo caso las facultades se convierten en simples factoriales

$$A_{\mu} = \frac{\Delta x \cdot \Delta^2 x \cdot 2! \xi \cdot \Delta^3 x \cdot 3! \xi \cdot \dots \cdot \Delta^{\mu-1} x \cdot (\mu-1)! \xi \cdot \Delta^{\mu} F(x)}{\Delta x \cdot \Delta^2 x \cdot 2! \xi \cdot \dots \cdot \Delta^{\mu} x \cdot \mu! \xi} = \frac{\Delta^{\mu} F(x)}{\Delta^{\mu} x \cdot \mu! \xi} = \frac{\Delta^{\mu} F(x)}{1 \cdot \mu! \xi^{\mu}}$$

lo cual da para el desarrollo de $F(x)$

$$F(x) = Fx + \frac{\Delta F(x)}{1! \xi} x + \frac{\Delta^2 F(x)}{1! 2! \xi^2} x^2 + \frac{\Delta^3 F(x)}{1! 2! 3! \xi^3} x^3 + \dots$$

indicando el punto que $x=0$, y tomándose las diferencias con relación á ξ . De esta fórmula se deduce también el Teorema de Maclaurin, haciendo $\xi = dx$.

En los artículos sucesivos nos ocuparemos en deducir de la fórmula (1), no solo todas las conocidas hasta el día, sino otras nuevas que nos servirán para resolver importantes problemas, entre otros el notabilísimo de la resolución de las ecuaciones numéricas, cualquiera que sea su naturaleza.

En lo que precede nos hemos limitado á exponer los principios de Wronski siguiendo su método de demostración, supliendo las faltas que en su obra se notan, y desarrollando los puntos oscuros de ella: no queremos, sin embargo, dejar de mencionar algunas objeciones que pudieran hacerse al rigor de la teoría antes expuesta. La primera es relativa al método de deducción, idéntico (al menos en apariencia), al de los coeficientes indeterminados. Difiere de él en que Wronski deduce la forma del desarrollo, cuando en el de los coeficientes indeterminados se *supone*: es cierto que Wronski admite que la función dada queda completa, ó como él dice, *agotada*, cuando el número de términos es infinito y por lo tanto no tiene en cuenta la resta ó término que completa el desarrollo; de aquí proviene que admita igualmente las series divergentes que las convergentes, dando medios de convertir las primeras en las segundas; de tal manera que toda la dificultad estriba en la solución de la duda siguiente: ¿Una serie divergente to-

mada en la totalidad infinita de sus términos, tiene un valor? Wronski dice si, otros matemáticos pueden responder no: sin perjuicio de entrar mas tarde en el examen de esta cuestión eludiremos por ahora la dificultad de la manera siguiente. Harémos previamente observar, que ya es dar un gran paso el encontrar una fórmula la mas general, y rigurosamente deducida en todos aquellos casos en que el desarrollo conduce á una serie convergente; pero aun podemos estenderla á todos los demas por el artificio siguiente. Por grande que sea el número de funciones destinadas á desarrollar la función dada, podemos además de aquellas, fijar otras que conduzcan á un desarrollo convergente, lo cual es siempre posible, y de esta manera, aun admitiendo la identidad del método con el de los coeficientes indeterminados, la deducción de la ley del desarrollo es rigurosa.

Contra nuestro propósito hemos alargado este artículo mas de lo conveniente, no entrando por lo mismo á examinar mas extensamente las objeciones contra el método de deducción tenido en cuenta el rigorismo con que han sido tratadas por los autores modernos, las cuestiones relativas á las series: quizá en otros artículos volvamos á continuar la discusión, á menos que otras personas mas autorizadas, tomen á su cargo esta tarea, que abandonaremos gustosos en mejores manos.

PEDRO PEREZ DE LA SALA.