

$$\begin{aligned}
& (\omega-n) i^k \frac{k(\omega-n-1)}{1 \cdot k!} \Delta^{k-1} \delta_{n+k} Y_{\omega-n} i^k \frac{k(\omega-n)}{1 \cdot k!} \Delta^{k-1} \delta_{n+k} Y_{\omega} = \\
& i^k \frac{\Delta^{2n+k} Y_{\omega}}{1 \cdot k!} \left[(\omega-n)(\omega-n-1) \frac{k-1}{1} - n(\omega-n) \frac{k-1}{1} \right] = i^k \frac{\Delta^{2n+k} Y_{\omega}}{1 \cdot k!} \left[(\omega-n)^{k+1} - 1 - n(\omega-n)^{k-1} \right] = \\
& i^k \frac{\Delta^{2n+k} Y_{\omega}}{1 \cdot k!} (\omega-n)^{k-1} \left[(\omega-n) - k - n \right] = i^k (\omega-2n-k) \frac{(\omega-n)^{k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{2n+k} Y_{\omega}
\end{aligned}$$

lo cual da para el término general

$$R_n = \sum_{k=0}^{k=\omega-n} \left[i^k (\omega-2n-k) \frac{(\omega-n)^{k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{2n+k} Y_{\omega} \right]$$

que sustituido en (9)

$$\Delta^{\omega-1} X_{\omega} = \sum_{n=0}^{n=\omega} \Delta^{\omega-n} \delta_{\omega} Y_{\omega} \times \frac{(\omega-1)^{n-1} - 1}{1 \cdot n!} \sum_{k=0}^{k=\omega-n} \delta_{\omega-n-k} \quad (\&.)$$

P. PEREZ DE LA SALA

(Se continuará.)

PLANÍMETRO DE G. STARKE.

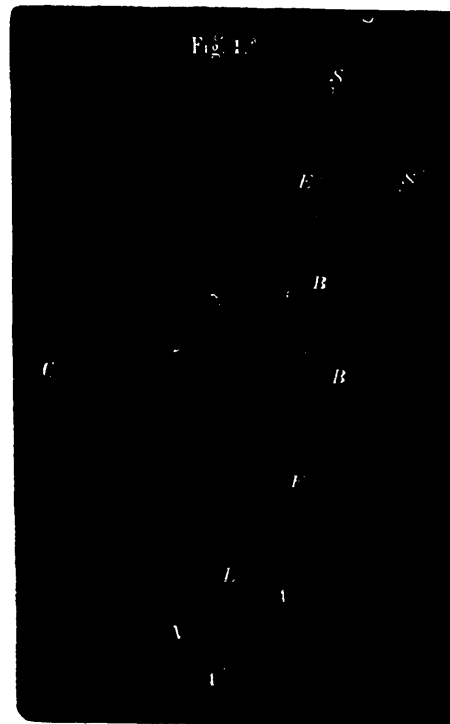
TEORÍA, USO Y RECTIFICACION DE ESTE INSTRUMENTO.

Sea C B A una posición cualquiera del instrumento, para la cual representaremos por α el ángulo que forma la varilla BA con el radio vector CA = ρ . La ruedecilla se encuentra en S, en A el puntero. Supongamos que este último recorre un elemento AA' = d , s , de modo que ρ se transforma en $(\rho + d, \varphi)$. Llamemos d, φ al ángulo ACA'.

Sea C B' A' la segunda posición del instrumento, α' el ángulo CA'B' y llamemos u al que forma el elemento AA' con el radio vector. Si SS' es la línea recorrida por la ruedecilla, el arco desarrollado por la rotación de la misma será S'E, componente normal a BS. Si llamamos r el radio de la ruedecilla y d, φ un elemento de su desarrollo tendremos

$$S'E = r \times d, \varphi.$$

Calculemos pues, estos valores y hagamos CB = c ; AB = a y AS = b .



En el triángulo ETG' tenemos

$$r \times d, \varphi = S'T \times \sin \angle ETS'.$$

De los dos triángulos CLA y TLA se deduce

$$a' + d \cdot \varphi = a + ETS'$$

de donde

$$ETS' = a' - a + d \cdot \varphi = d \cdot \alpha + d \cdot \varphi$$

y por consiguiente

$$r \times d v = S' T \times \text{sen } (d\varphi + d\alpha) = S' T (d\varphi + d\alpha);$$

pero $S' T = S' A' - A' T = b - A' T$; luego

$$r \times d v = (d\varphi + d\alpha) (b - A' T).$$

En el triángulo A' T A tenemos

$$A T = \frac{d \cdot s \times \text{sen } (u + \alpha)}{d \cdot \varphi + d \alpha}$$

y por tanto será

$$(I) \dots r \times d v = b (d\varphi + d\alpha) - d s \times \text{sen } (u + \alpha).$$

$$(1) d s \times \text{sen } (u + \alpha) = d s \times \text{sen } u \cos \alpha + d s \cos u \text{sen } \alpha.$$

Si se baja la perpendicular AN sobre la recta A' C tendremos

$$A N = p \cdot d \varphi = d \cdot s \times \cos (u - 90^\circ); \text{ tambien}$$

$$d \cdot s \times \text{sen } u = p d \cdot \varphi \dots (a)$$

En el triángulo ABC es

$$\cos \alpha = \frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} \dots (b)$$

y en el AA'N

$$A N = d \varphi, A A' N = 180^\circ - (u + d \alpha),$$

$$A N A' = 90^\circ + d \varphi;$$

tambien

$$d \varphi = \frac{d s \times (u - 90^\circ)}{\text{sen } (90^\circ + d \varphi)} = -\cos u \times d s$$

puesto que

$$\text{sen } (90^\circ + d \varphi) = \cos d \varphi = 1$$

Dedúcese de aquí que

$$\cos u = -\frac{d \varphi}{d s} \dots (c)$$

Introduciendo estos valores de (a), (b) y (c) en (1) se tendrá

$$d s \times \text{sen } (u + \alpha) = p d \varphi \frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} - d \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} \right)^2}$$

y substituyendo en (I) resultará

$$r d v = b d \varphi + b d \alpha - p d \varphi \frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} + d \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} \right)^2}$$

donde para abreviar haremos

$$d \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{p^2 + a^2 - c^2}{2 a p} \right)^2} = f(p) d \varphi$$

Como solo se trata de apreciar el valor absoluto de $r d v$ podemos, prescindiendo de

los signos, escribir

$$r d v = \frac{d \varphi}{2 a} (p^2 + a^2 - c^2) - b d \varphi - b d \alpha - f(p) d \varphi = \frac{1}{2 a} p^2 d \varphi + \frac{d \varphi}{2 a} (a^2 - c^2 - 2 a b) - b d \alpha - d \varphi f(p).$$

Multiplicando esta expresion por a e integrando será

$$a r v = \int \frac{1}{2} p^2 d \varphi + \frac{1}{2} (a^2 - c^2 - 2 a b) \int d \varphi - a b \int d \alpha - a \int f(p) d \varphi.$$

Cuando se toma para polo un punto fuera de la figura cuya superficie se trata de medir, desaparecen las tres últimas integrales, pues- to que los límites son los mismos, y se tendrá

$$a r v = \int \frac{1}{2} p^2 d \varphi$$

Si el polo se ha tomado dentro de la figura solo desaparecen los dos últimos integrales, y quedará

$$a r v = \int \frac{1}{2} p^2 d \varphi + \frac{1}{2} (a^2 - c^2 - 2 a b) \int_0^{2\pi} d \varphi =$$

$$= F + \pi (a^2 - c^2 - 2 a b) = F - \pi (c^2 + 2 a b - a^2) = F - C, \text{ haciendo } C = \pi (c^2 + a b - a^2), \text{ que es una magnitud constante.}$$

Tenemos pues;

$$F = a r v, \text{ cuando el polo se halla fuera de la figura y}$$

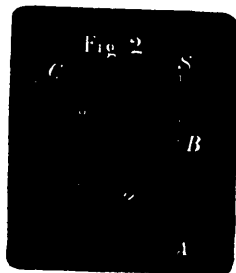
$$F = a r v + C$$

cuando dicho punto se toma dentro de ella.

En este instrumento cada vuelta completa de la ruedecilla representa 80 centímetros cuadrados. Esta se halla dividida en 10 partes, marcadas respectivamente con los números 1, 2.... 10; cada una de estas partes lo está a su vez en otras 10 y por medio de un nonius pueden apreciarse hasta centésimas de estas. Las vueltas completas de la ruedecilla se leen en un disco dividido en 20 partes, correspondien- do cada una de estas a una vuelta de aquella

representando por consiguiente 80 centímetros cuadrados. Así, por ejemplo, si el puntero del disco se halla entre 40 y 50 y el índice de la ruedecilla marca 5,27 se leerá 45,27.

Como B. S. es menor que B. C. habrá una posición de los brazos B. C. y A S. en que A S será normal á C. S. Sea (fig. 2) esta la posición



del instrumento. Supongamos constante el ángulo C. BA y que el punto A recorre 360° , así habrá descrito un círculo de radio A C. Llamemos x á CA é y á CS. Los triángulos CA S y C B S nos darán

$$y^2 = x^2 - b^2 = c^2 - (b-a)^2$$

de donde

$$x^2 = c^2 + 2ab - a^2$$

Así pues, la superficie del círculo descrito por A será

$$= \pi(c^2 + 2ab - a^2)$$

La ruedecilla nos dará en este caso 0, porque permanece constantemente normal á los elementos sucesivos del círculo descrito por el punto S. Pero según nuestra fórmula anterior cuando el polo se halla situado dentro de la superficie tenemos

$$F = a r v + C$$

y como en el caso que consideramos

$$rv = 0,$$

resulta

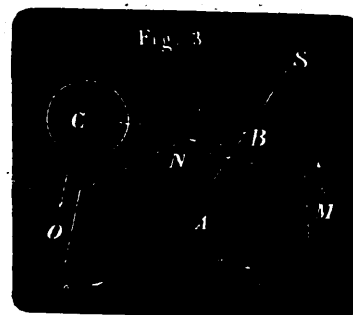
$$F = C = \pi(c^2 + 2ab - a^2),$$

superficie del círculo trazado por el punto A.

Uso del instrumento. De la anterior teoría se deduce que este instrumento puede apreciar la superficie de cualquier figura plana, procediéndose del siguiente modo.

Si la figura cuya superficie se trata de medir puede colocarse en una zona comprendida entre el máximo y minimum de separación del puntero A y el polo C, este y el cilindro que sirve de contrapeso al instrumento se si-

tuarán fuera de la figura. Sea, por ejemplo, para este caso AMNO (fig. 3) la figura en cues-



tion. Tómese un punto del contorno A, para punto de partida, colóquese en él el puntero y léase el número que marca el disco y la ruedecilla. Hecho esto hágase recorrer al referido puntero todo el contorno en la dirección que indican las flechas hasta que vuelva al punto de partida A y léase el número que ahora se indica en el disco y la ruedecilla, la diferencia entre estas dos lecturas nos dará la superficie buscada en una unidad ó escala que puede variar con la longitud del brazo a .

Si la superficie no puede situarse en la zona que hemos dicho, colóquese el polo dentro de la figura, recórrase el contorno de esta en la dirección que marcan las flechas y anótense las lecturas antes y después del movimiento. Si la segunda lectura es mayor que la primera, para obtener la superficie buscada, se añadirá la diferencia á la constante C de la fórmula; en el caso contrario se restará de esta.

La fórmula $a r v = F$ nos dice que variando la longitud del brazo a del instrumento podemos variar á voluntad la unidad superficial de medida del mismo. Naturalmente esta variación no podrá exceder los límites que en el instrumento se le ha asignado. Si diferenciamos la expresión

$$a = \frac{F}{r v}$$

con respecto á a y á F tendremos

$$d a = \frac{d F}{r v} \quad (1)$$

Conociendo, pues, la longitud de a para la

cual el instrumento dá las superficies en una unidad dada, podrán calcularse por la fórmula (d) las variaciones de a correspondientes á distintas unidades superficiales. Pero para verificar este cálculo con toda precision es necesario conocer con exactitud el radio r de la ruedecilla. Despues daremos á conocer un método sencillo para determinar la longitud de a correspondiente á cualquier unidad superficial que quiera adoptarse.

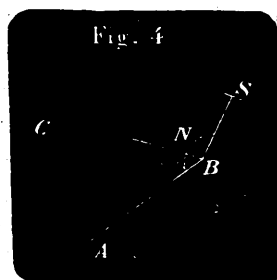
Rectificacion del instrumento. Para el desarrollo de la teoria se ha partido del supuesto de que la ruedecilla S era perpendicular á AB , ó que el eje de la misma, si no coincidía exactamente con la prolongacion de AB le era paralelo. Fácilmente se vé no ser de precision que dicho eje coincida con AB , porque una posicion paralela á BS no alteraria en nada la teoria.

La primera condicion para la exactitud de las apreciaciones es, pues, que el eje de la ruedecilla sea paralelo á la varilla AB .

Para hacer esta correccion sirve el tornillo de cabeza plana que une la parte del instrumento donde va la rueda con A B en el punto B ; alojando este tornillo puede moverse dicha parte en derredor del segundo tornillo y corregirse así la posicion del eje.

Un defecto de esta especie se conoce en que la ruedecilla dá resultados distintos para una misma superficie, cuando esta se mide á distancias diferentes de un mismo polo, tomado fuera de la figura.

En el estuche del instrumento se acompaña un disco de laton con una ranura circular. El diámetro de este circulo se ha medido cuidadosamente con un aparato á propósito y la superficie de dicho circulo, calculada en centímetros cuadrados, va grabada en la placa. Esta sirve para la rectificacion de la siguiente manera: tómate un punto fuera para polo y desde él, en dos posiciones distintas y cuanto mas posible separadas del disco, se hace que el puntero A del instrumento recorra la ranura circular. Si la lectura de la ruedecilla es idéntica para ambas posiciones, el eje BS será paralelo á AB ó el ángulo ABS (fig. 4) será de 180° .



Si la ruedecilla dá un número mayor cuando el disco se halla á menor distancia del polo que cuando está mas separado, el ángulo $ABS = N$ será menor que 180° y habrá que corregirlo convenientemente. En el caso contrario N será mayor que 180° .

Hecha esta correccion del ángulo, es necesario aun arreglar la longitud de la varilla a de modo que la ruedecilla marque la superficie anotada en el disco.

Debemos hacer observar que el resultado de la lectura en la ruedecilla será tanto mayor para una misma superficie, cuanto menor sea a lo cual tambien nos lo dice la fórmula

$$r v = \frac{F}{a}$$

Arreglada así la varilla a , el instrumento dará las superficies espresadas en centímetros cuadrados. Si se quisiera adoptar otra unidad superficial habria que empezar por espresar la superficie del circulo, anotada en el disco, en esta unidad y corregir despues la longitud de a hasta que la ruedecilla dé un resultado igual á la superficie calculada.

En la rectificacion del instrumento no deben limitarse á una ó dos medidas las operaciones, sino por el contrario repetir estas muchas veces, tomando despues la medida de todas; pero no es necesario leer cada vez que el puntero dé una vuelta completa al contorno, siendo mejor efectuar las lecturas al empezar el movimiento y despues de la n vueltas, dividiendo luego la diferencia entre los dos números anotados por n para obtener el resultado medio.

Despues de la rectificacion de a bueno será ver si por el movimiento de esta no ha variado el ángulo N .

En cuanto á las constantes C tambien se obtienen, segun las dimensiones de estos instrumentos, por medio de círculos trazados en placas de laton y cuyas superficies se calculan con la mayor aproximacion.

Para el instrumento núm. 42 es

$C = 189,55$ centímetros cuadrados.

La longitud de la varilla a , corregido el ángulo N , es de 22,9 centímetros.

Para la apreciacion en centímetros debe tenerse en cuenta que cada vuelta de la rueda decilla representa 80 centímetros cuadrados, así pues habrá que multiplicar el número que represente la medida hallada por 8. Lo mismo deberá hacerse con la constante, por manera que si llamamos á esta C' y w al dato de la rueda decilla

$$8 (C' + w)$$

será la superficie buscada en centímetros cuadrados.

La superficie del círculo de que hemos hablado para la rectificacion del instrumento es de 56,72 centímetros cuadrados.

(Traducido del alemán.)

I. GOMEZ ROLDAN.

NOTICIAS VARIAS.

Han regresado de las visitas á las provincias de sus respectivos distritos, los inspectores D. Toribio Arellano y D. Constantino German.

Ha tomado posesion del cargo de vocal de la Junta Consultiva el inspector D. José Gomez Ortega.

Los inspectores D. Lucio del Valle y D. Ramon de Echevarria que por encargo del Gobierno han visitado la Exposicion de Londres, han regresado á esta capital, y sabemos que se va á publicar la memoria de los importantes estudios que han hecho acerca de todo lo relativo al ramo de obras públicas.

Ha sido encomendado al Ingeniero D. Eduardo Trujillo, el estudio del proyecto del puerto de Málaga ademas de conservar el cargo de Gefe de la provincia que actualmente desempeña.

El Ingeniero primero D. Rafael Navarro que se hallaba encargado del estudio de la cuenca del Guadalquivir ha sido destinado al servicio de la provincia de Sevilla.

Ha sido promovido al empleo de Gefe de segunda clase el Ingeniero primero D. Francisco Durban en la vacante que ha ocasionado la declaracion de supernumerario del Ingeniero Gefe de segunda clase D. Carlos Mondejar.

El Ingeniero primero D. Federico Rivero destinado á la provincia de Sevilla ha sido trasladado al servicio de la division de ferro-carriles de la misma provincia, en reemplazo de D. Manuel Aramburu que ha pasado á la de los de Madrid.

El aspirante segundo D. Francisco Perez Casariego, que se hallaba en los ejercicios prácticos en la provincia de Cuenca ha sido trasladado á la de Oviedo.

El aspirante segundo D. Vicente Jadraque que se hallaba destinado á la provincia de Badajoz ha sido trasladado á la de Cuenca.

De los 124 aspirantes que han presentado solitud para ingresar este año en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, han sido aprobados 28 por el orden siguiente:

D. Enrique Gadea Vilardebó. D. Juan Malberti y Rigo. D. José Paul Angulo. D. Bernardo Gonzalez Garcia Gutierrez. D. Tomas Pacheco y Garcia. D. Eusebio Estada y Sureda. D. Enrique Arenas y Fontela. D. Antonio Falcon y Lorenzo. D. Rogelio Ruiz y Gil. D. Jacinto Maristany y Aristany. D. José Nogales y Merino. D. Simon Archilla y Espejo. D. Joaquin Lopez Vazquez. D. Eduardo Escalona y Casilari. D. Primitivo Mateo Sagasta. Don Oscar Pascual y de Bofarull. D. Angel Labarrieta y Falcon. D. Juan Alvarez Anton. D. Ramon Perez Garcia. D. Sebastian Martinez Risco. D. Vicente Gasca y Melús. D. Francisco Terán Sotomayor. Don Hilario del Izaga y Fernandez. D. Ricardo Fernandez de Riero. D. Pio de la Torre y Palacio. D. Manuel Izquierdo y Diaz. D. Angel de Puyade y Bellver. D. Enrique Heriz y Campaneria.

Por las noticias varias y articulos no firmados.

A. MONTERDE.

SUMARIO.

Filosofia de la Technia matemática, por D. P. Perez de la Sala.—Planimetro de G. Starke, por D. I. Gomez Roldan.—Noticias varias.

EDITOR RESPONSABLE D. AGUSTIN MONTERDE.

REDACCION. Carrera de San Gerónimo, núm. 22, segundo.

Este periódico sale los dias 1.º y 15 de cada mes, acompañado de diez y seis paginas de una interesante coleccion de Memorias y de la parte legislativa correspondiente. El precio de suscripcion es 8 rs. al mes en Madrid y 25 por trimestre en provincias. Se suscribe en la redaccion y en casa de los corresponsales.

MADRID —1862.

IMPRENTA DE LA VIUDA DE D. JOSE COSME DE LA PEÑA, calle de Atocha, núm. 149.