

aun quedan en pié dos graves dificultades. 1.ª ¿Es única esta ley de los coeficientes? 2.ª ¿No queda sin resolver la objecion de Wronski, pues en definitiva venimos á parar á la relacion que liga el primer coeficiente con la funcion relacion que nos es desconocida? (a)

Wronski no limita su obra á la parte crítica; entra tambien en la espositiva y hace ver que las condiciones de posibilidad del teorema de Taylor son dadas por otra ley superior, de la cual es uno de los casos mas particulares.

Este es en resumen el trabajo de Wronski recibido desdeñosamente por sus contemporáneos ó atacado con saña y una parcialidad ajena del terreno científico; matemáticos posteriores han tachado de defectuosa la demostracion de Lagrange, fundándose en algunas de las razones aducidas por Wronski; tiempo es ya de dar á cada uno lo suyo y dejando aparte prevenciones injustificadas conceder á la memoria de nuestro autor lo que le fué negado durante su vida.

LEY UNIVERSAL DE LA TECHNIA.

Varios son los motivos que nos han inducido á presentar como muestra del segundo género de escritos de Wronski, la fórmula por él denominada *Ley universal de la Technia*, siendo el 1.º la relacion que tiene con la critica de las funciones analíticas de Lagrange objeto del extracto que acabamos de dar. 2.º El estar fundada en consideraciones del orden combinatorio, cuya teoria está llamando la atencion y dando lugar á notables investigaciones de célebres matemáticos. 3.º El ser la base de una gran parte de las teorías matemáticas, especialmente de aquellas que se pueden esponder por medio de las séries. 4.º y último. Que lo poco extenso de la memoria la hace apropiado para un artículo de REVISTA.

(a) No se debe confundir la relacion general entre las dos funciones con el método para obtener la una por medio de la otra, el cual nos es conocido en cada caso particular.

Antes de dar principio á la demostracion de la fórmula que contiene la ley presentada por Wronski como el fundamento del desarrollo de las funciones así algébricas como trascendentes, conviene, aunque sea rápidamente, hacer alguna indicacion sobre el modo de considerar Wronski la ciencia matemática. Teniendo esta por objeto la cantidad, debe ante todo estudiar la naturaleza y propiedades intrínsecas de cada especie: una cantidad radical por ejemplo, posee propiedades distintas é interviene de distinta manera en los cálculos que una cantidad logaritmica con la cual nunca podrá confundirse. El estudio que bajo este punto de vista se hace de la cantidad, constituye para Wronski una rama especial que denomina *Teoria*. Se comprende sin embargo, que una cantidad logaritmica sea igual en magnitud á una radical; pues la ley de continuidad las hace pasar á ambas por todos los grados: á la rama de las matemáticas que se ocupa solo de la medida de las cantidades y prescinde de su naturaleza, la llama Wronski *Technia*.

Para la medida de las cantidades existen métodos generales de los que solo mencionaremos las séries, verificándose la medida por medio de una ó de varias unidades ya arbitrarias ya sujetas á una ley dada. Cuando las unidades son conmensurables con la funcion dada, el número de términos de la série es finito, y no constituyen verdaderamente una série, siendo tan solo la misma funcion bajo otra forma, y la ley que liga las dos, una relacion de identidad.

El caso mas general y el que da lugar á relaciones de equivalencia, se verifica cuando el número de términos de la série es infinito; Wronski abarca la série en su totalidad, y no toma, segun se acostumbra, un número finito de términos agregando ademas uno que la complete denominado complementario, y de esta manera prescinde de su convergencia fácil de obtener en cada caso variando las unidades que sirvieron de medida.

Es posible concebir un número infinito de unidades arbitrarias, aunque esto no tenga lugar en la realidad á menos de sujetarlas á una

ley que entonces las abarca todas: este segundo caso hallándose comprendido en el primero que es el mas general, enunciaremos de la manera siguiente la ley universal de la technia.

Dada una funcion de una ó de muchas variables, dadas ademas otras en número infinito, desarrollar en série la primera en funcion de las segundas y determinar la ley de las coeficientes de sus diferentes términos; de manera que siendo $F(x)$ la funcion dada y $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ etc. las arbitrarias,

$$(1) F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + \text{etc.}$$

El problema está reducido á encontrar el valor de A_μ , pero antes nos ocuparemos de algunas proposiciones relativas al orden combinatorio, sobre las cuales se funda toda la demostracion de la fórmula (1) pues nuestro objeto es poner este articulo al alcance de las personas que solo posean los primeros elementos de las matemáticas.

En el análisis combinatorio se llaman *funciones alternadas ó determinantes* á funciones formadas de la manera siguiente: Sean a, b, c, d etc. cantidades que varían segun los índices ó acentos que se las agregue, de tal manera que para cada letra tengamos tantas cantidades (no valores) distintas como índices; formemos todos los productos ó combinaciones posibles de manera que en cada uno entren todas las letras y todos los índices pero sin repetición; sumemos estos productos dando el signo mas á los términos que contengan un número cero ó par de inversiones (a) y el menos al que contenga un número impar, y la funcion obtenida de esta suerte se llama funcion alternada ó el determinante de las cantidades a, b, c, d etc. Por ejemplo

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

es una funcion alternada ó determinante de dos letras

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 - a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

de tres.

(a) Cuando las letras guardan el mismo orden en todos los términos, se llama inversion la combinacion de dos índices escritos en orden inverso; por ejemplo 3—1, 3—2, en vez 1—3, 2—3 que es el orden natural.

En vez de permutar los índices se obtendrá igual resultado dejando invariable el orden de aquellos y permutando las letras

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

Para dar mas generalidad á las proposiciones supondremos que los índices pueden representar no solo cantidades diversas, sino operaciones arbitrarias practicadas con la cantidad á que se aplican.

Wronski emplea la letra hebrea ϖ (schin) para designar las determinantes, de manera que la funcion puesta anteriormente como ejemplo la representa segun su notacion por

$$\varpi [a, b, c]_1, 2, 3 \text{ ó } \varpi [a_1, b_2, c_3] (a)$$

Para dar regularidad á la notacion, Wronski representa por $X_1 X_2 X_3$ etc. las cantidades, á las cuales hace preceder del signo Δ^{ϵ_k} para indicar una operacion cualquiera hecha sobre ellas, siendo ϵ la señal que indica los índices sujetos á permutacion: cuando la operacion se reduce á tomar una diferencia, entonces la ϵ se cambia en δ ó se suprime, especialmente si las permutaciones han tenido lugar. Es evidente que siendo arbitrarias las operaciones y en número cualquiera, la misma notacion puede representar otras funciones tambien arbitrarias aunque dependientes de la primitiva por el intermedio de las operaciones practicadas sobre ellas. Debemos tener presente que la permutacion subsiste en cualquiera otra notacion que adoptemos siempre que lleve el índice ó cantidad el signo ϵ . Así en

$$\varpi (x_n + z_{\epsilon_m})_k$$

la x_n permanece invariable y la z_m sufre las permutaciones. En

$$\varpi (x_n + z_m)_{\delta_k}$$

(a) Laplace y Cauchy emplearon la misma notacion substituyendo el signo Σ al ϖ lo cual introducía confusion por el triple significado de aquella letra: hoy se anotan los determinantes en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

es k sobre quien deben verificarse.

Tomemos por ejemplo

$\psi [\Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_3} X_3]$ ó $\psi [\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3] \delta_1 \delta_2 \delta_3$
cuyo desarrollo es

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_3} X_3 - \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_3} X_3 + \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_3} X_3 \\ - \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_3} X_3 + \Delta^{\delta_3} X_3 \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 - \Delta^{\delta_3} X_3 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_1} X_1 \end{array} \right\}$$

Si suponemos que Δ^{δ_1} representa $\sqrt[5]{}$; Δ^{δ_2}
log. y $\Delta^{\delta_3} \frac{1}{x^2 + x^2}$, fácil es deducir cual será el
resultado (a)

Cuando se escluye de la combinacion algu-
na de las cantidades y alguno de los esponen-

tes el determinante se representa de la mane-
ra siguiente:

$$\psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2 \dots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right] [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\omega] - \delta_\mu$$

en el cual se escluye la funcion X_μ y el espo-
nente δ_μ . Por ejemplo la funcion

$$\Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_3} X_3 - \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_3} X_3 + \Delta^{\delta_2} X_2 \Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_3} X_3$$

$$- \text{etc.} = \psi [\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3] \delta_1 \delta_2 \delta_3$$

podrá representarse por

$$\psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \Delta X_4}{\Delta X_5} \right] [\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4] - \delta_5$$

Establecida la notacion, vamos á demostrar
la proposicion fundamental de las funciones ψ ,
que si bien forma parte de los tratados sobre
determinantes, no la hemos visto presentada
con la generalidad que su importancia reclama.

Primera parte. Toda funcion ψ se puede re-

presentar por medio de otras del grado imme-
diatamente inferior, ordenando los términos
con relacion á una de las cantidades, aplicán-
dola sucesivamente todos los índices. Hé aquí
la fórmula

$$(2) \psi [\Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \dots \Delta^{\delta_\omega} X_\omega] = (-1)^\mu \left\{ \begin{array}{l} (-1)^1 \Delta^{\delta_1} X_\mu \psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2 \dots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right] (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_\omega) - \delta_1 \\ (-1)^2 \Delta^{\delta_2} X_\mu \psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2 \dots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right] (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_\omega) - \delta_2 \\ \vdots \\ (-1)^\omega \Delta^{\delta_\omega} X_\mu \psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2 \dots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right] (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_\omega) - \delta_\omega \end{array} \right.$$

Cuando son dos las funciones resulta idénti-
camente la proposicion, y seria fácil demos-
trar que verificándose para un número cual-

quiera n de funciones y esponentes se verifica
tambien para $n+1$; pero vamos á dar una de-
mostracion directa del teorema.

(a) La notacion $\Delta \delta$ nos parece mas clara que la
 $X_{m,n}$ citada ordinariamente, aunque tambien en esto
tiene Wronski la prioridad, pues en su filosofía del in-

finito representa estas funciones por ${}^n \varphi_m$, tambien mas
claramente espresadas que por $\varphi_{m,n}$ segun la notacion
usual.

(Se continuará.)