

sentados en otras obras; y de cita en cita, y de digresion en digresion, se encuentra el lector á mil leguas del punto de partida, y cansado y desanimado de una carrera cuyo fin no prevee, arroja el libro renunciando á la verdad que deseaba poner en claro: creemos prestaría un verdadero servicio á la ciencia el que poseyendo en matemáticas los conocimientos elevados que para ello se requieren, se dedicase á desarrollar bajo una forma aceptable los descubrimientos en germen diseminados en las obras de Wronski.

De dos géneros son sus escritos; los unos versan sobre critica de las obras contemporáneas mas notables relativas á la metafísica de las matemáticas; en los otros se ocupa mas de la parte espositiva, aunque sin abandonar por completo la critica. Despues de una filosofía matemática que dejó incompleta, publicó otros escritos sobre resolucion de las ecuaciones asi de equivalencia como de congruencia; una mecánica celeste tambien sin concluir; varias memorias sobre la locomocion y máquinas de vapor, etc., etc. No es posible formar un juicio exacto de Wronski si no se le conoce bajo los dos aspectos de critico y de espositor, por lo cual analizaremos una memoria de cada clase, escogiendo para la primera la critica de las funciones analíticas de Lagrange, menos metafísica y mas elemental que la Teoria del infinito, ó la critica de las funciones generatrices de Laplace.

REFUTACION DE LA TEORÍA

DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS DE LAGRANGE

POR

HOËNE WRONSKI.

Queriendo Lagrange dar una base filosófica al cálculo infinitesimal y evitar la idea del infinito y de los infinitamente pequeños, para eludir las dificultades creadas á su empleo en las matemáticas por las dudas que introducen respecto á su rigor y exactitud, presentó la teoria de las funciones derivadas fundada en los dos principios siguientes:

$$(1). \quad f(x+h) = A + Bh + C h^2 + D h^3 + \text{etc.}$$

$$(2). \quad f(x+h) = f(x) + P h.$$

Hacemos observar de paso, que supuesto el desarrollo (1), el segundo principio está implícitamente contenido en el primero.

La primera objecion contra el principio (1) versa sobre la forma misma del desarrollo, puramente hipotética y verificada solo *à posteriori*: ¿por qué esta forma mas bien que otras infinitas que pudieran establecerse? Resulta, pues, insostenible la pretension filosófica de una deducción *à priori* de la teoria de las derivaciones, cuando se empieza ignorando la forma del desarrollo que es su fundamento, comprobada solo *à posteriori*. ¿Se dirá que son posibles todas las formas? ¿A qué tomarse entonces tanto empeño para establecer la forma siendo esta arbitraria? Y por último, falta en semejante caso presentar la ley general que liga entre si las diferentes formas de desarrollo.

En cuanto al principio (2) no es razon suficiente para aceptarlo el verificarse idénticamente cuando $h=0$; un caso particular no da derecho á deducir de él una ley general que los comprenda á todos, y tan autorizados estaríamos para suponer esta forma como otra cualquiera que se verifique idénticamente para un valor particular de h .

La comision de exámen reduce á uno solo los dos principios sin entrar á resolver ninguna de las dos objeciones espuestas, y es tan poco feliz al probar su aserto, que el lector se queda sin saber si es el primer principio el contenido en el segundo ó vice-versa. En efecto, asegura la comision que "el segundo es solo un medio de que se vale Lagrange para obtener el primero:" es decir, que este se encuentra implícitamente contenido en el segundo del cual es un corolario: pero luego añade, "el segundo principio encierra una suposicion acerca de la naturaleza de la funcion P, suposicion ligada con la ecuacion (1) ó con la propiedad de no admitir en su desarrollo la funcion $f(x+h)$ mas que potencias enteras de h " y si se halla ligado con

el primero es forzoso haber supuesto este previamente.

Llamamos la atención hacia las palabras subrayadas, porque en ellas se viene por fin á confesar que el fundamento de la teoría de Lagrange es en definitiva una suposición, la cual no es única, pues mas abajo asegura la comisión, no sabemos con qué fundamento, ser lícito establecer la ecuación $P=R+Qh$ siempre que P no sea infinito para $h=0$.

La comisión de exámen se desentiende siempre de la objeción capital de Wronski contra la forma ya preconcebida del desarrollo; da siempre por sentado que este ha de ser en función de las potencias de h , y de esta base parte para combatir la duda emitida por Wronski, á saber, que aun supuesta la forma, no se puede admitir como demostrada la esclusión de po-

tencias fraccionarias en el desarrollo, porque podrían compensarse en la serie indefinida de términos que le constituyen. La comisión replica que si se compensan se destruyen, y por lo tanto no existen: la respuesta no es muy concluyente por no ser lo mismo *compensación* que *destrucción*; y así resulta en efecto, presentando Wronski desarrollos en los cuales entran potencias fraccionarias de h . La razón alegada por Lagrange y apoyada por la comisión para escluir este género de potencias, no debía hacer mucha fuerza á los matemáticos que desde muy antiguo conocían desarrollos en los cuales entraban cantidades arbitrarias extrañas á la función primitiva, y otro tanto podía suceder con las radicales introducidas por las potencias fraccionarias de h . Contentémonos con citar la tan conocida fórmula

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + \frac{\cos a}{1} (x-a) - \frac{\operatorname{sen} a}{1.2.} (x-a)^2 + \frac{\cos a}{1.2.3.} (x-a)^3 + \text{etc.} \quad (a).$$

Poisson pretendió salvar el vacío de la demostración de Lagrange substituyendo esponentes indeterminados á los enteros de este autor, con lo cual dejaba subsistente la objeción capital relativa á la forma preconcebida del desarrollo, ofreciendo por otra parte dificultad el admitir, como supone gratuitamente, que ninguno de los coeficientes del desarrollo puede ser cero.

Dejando aparte esta primera objeción, y dando por sentado que la forma del desarrollo es la de Lagrange, falta la ley que liga los coeficientes de los términos de la serie. Es evidente que la relación [1] no es en general de identidad sino de equivalencia, cuya ley debe ser conocida; es decir, supuesto el desarrollo, que ley liga á los coeficientes, pues en rigor solo viene á darse como propiedad de una función derivada de un orden dado, ser el coeficiente de un término particular de la serie.

Lagrange ha querido responder á este cargo deduciendo directamente que el segundo coeficiente se deriva del primero como este de la función dada; el tercero del segundo como el segundo del primero, etc: hé aquí en resumen la demostración de su aserto. De la fórmula

$$f(x+i) = F(x) + P(x)i + Q(x)i^2 + \text{etc.}$$

se deducen los dos desarrollos idénticos

$$f(x+h+i) = F(x+h) + P(x+h)i + Q(x+h)i^2 + \text{etc.}$$

$$f(x+h+i) = F(x) + P(x)(i+h) + Q(x)(i+h)^2 + \text{etc.}$$

que igualándolos y desarrollando las funciones parciales que contienen, dan la derivación antes citada. Para ello hace

$$P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \text{etc.}$$

$$Q(x+h) = Q(x) + hQ'(x) + \text{etc.}$$

en los cuales supone que $P'(x)$ se deriva de $P(x)$, como $P(x)$ de $F(x)$, y lo mismo dice de $Q'(x)$ y los demás. Pero esta suposición contiene implícitamente la ley que se pretende demostrar, lo que hace inútil y echa por tierra toda la argumentación de Lagrange.

Admitiendo esta demostración como buena,

(a) Se dirá que esta es una fórmula de identidad ó una transformación de la elemental

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \cos (x-a) + \cos a \operatorname{sen} (x-a);$$

pero haremos observar que á pesar de la indeterminada a , se obtienen valores cada vez mas aproximados á medida que se toma mayor número de términos, estableciéndose progresivamente la compensación; pudiéramos además citar otras mil y entre ellas la fórmula tan conocida del binomio de Abel.

aun quedan en pié dos graves dificultades. 1.ª ¿Es única esta ley de los coeficientes? 2.ª ¿No queda sin resolver la objecion de Wronski, pues en definitiva venimos á parar á la relacion que liga el primer coeficiente con la funcion relacion que nos es desconocida? (a)

Wronski no limita su obra á la parte crítica; entra tambien en la espositiva y hace ver que las condiciones de posibilidad del teorema de Taylor son dadas por otra ley superior, de la cual es uno de los casos mas particulares.

Este es en resumen el trabajo de Wronski recibido desdeñosamente por sus contemporáneos ó atacado con saña y una parcialidad ajena del terreno científico; matemáticos posteriores han tachado de defectuosa la demostracion de Lagrange, fundándose en algunas de las razones aducidas por Wronski; tiempo es ya de dar á cada uno lo suyo y dejando aparte prevenciones injustificadas conceder á la memoria de nuestro autor lo que le fué negado durante su vida.

LEY UNIVERSAL DE LA TECHNIA.

Varios son los motivos que nos han inducido á presentar como muestra del segundo género de escritos de Wronski, la fórmula por él denominada *Ley universal de la Technia*, siendo el 1.º la relacion que tiene con la critica de las funciones analíticas de Lagrange objeto del extracto que acabamos de dar. 2.º El estar fundada en consideraciones del orden combinatorio, cuya teoría está llamando la atencion y dando lugar á notables investigaciones de célebres matemáticos. 3.º El ser la base de una gran parte de las teorías matemáticas, especialmente de aquellas que se pueden esponer por medio de las séries. 4.º y último. Que lo poco extenso de la memoria la hace apropiado para un artículo de REVISTA.

(a) No se debe confundir la relacion general entre las dos funciones con el método para obtener la una por medio de la otra, el cual nos es conocido en cada caso particular.

Antes de dar principio á la demostracion de la fórmula que contiene la ley presentada por Wronski como el fundamento del desarrollo de las funciones así algébricas como trascendentes, conviene, aunque sea rápidamente, hacer alguna indicacion sobre el modo de considerar Wronski la ciencia matemática. Teniendo esta por objeto la cantidad, debe ante todo estudiar la naturaleza y propiedades intrínsecas de cada especie: una cantidad radical por ejemplo, posee propiedades distintas é interviene de distinta manera en los cálculos que una cantidad logaritmica con la cual nunca podrá confundirse. El estudio que bajo este punto de vista se hace de la cantidad, constituye para Wronski una rama especial que denomina *Teoria*. Se comprende sin embargo, que una cantidad logaritmica sea igual en magnitud á una radical; pues la ley de continuidad las hace pasar á ambas por todos los grados: á la rama de las matemáticas que se ocupa solo de la medida de las cantidades y prescinde de su naturaleza, la llama Wronski *Technia*.

Para la medida de las cantidades existen métodos generales de los que solo mencionaremos las séries, verificándose la medida por medio de una ó de varias unidades ya arbitrarias ya sujetas á una ley dada. Cuando las unidades son conmensurables con la funcion dada, el número de términos de la série es finito, y no constituyen verdaderamente una série, siendo tan solo la misma funcion bajo otra forma, y la ley que liga las dos, una relacion de identidad.

El caso mas general y el que da lugar á relaciones de equivalencia, se verifica cuando el número de términos de la série es infinito; Wronski abarca la série en su totalidad, y no toma, segun se acostumbra, un número finito de términos agregando ademas uno que la complete denominado complementario, y de esta manera prescinde de su convergencia fácil de obtener en cada caso variando las unidades que sirvieron de medida.

Es posible concebir un número infinito de unidades arbitrarias, aunque esto no tenga lugar en la realidad á menos de sujetarlas á una