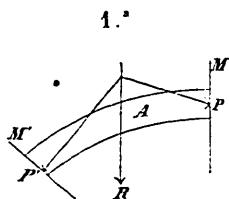


NOTA

SOBRE LA DETERMINACION DEL PROBLEMA DEL
EQUILIBRIO DE LAS BÓVEDAS.

1. La indeterminacion del punto en que se halla aplicado el empuje en la clave de una bóveda que tiende á romperse por rotacion, obliga á investigar las dimensiones convenientes para las dovelas y la estabilidad del conjunto por medio de un coeficiente calculado empiricamente por la comparacion con las construcciones existentes. Esta indeterminacion proviene de la infinitud de maneras posibles para descomponer una fuerza R (fig. 1.^a) aplicada á

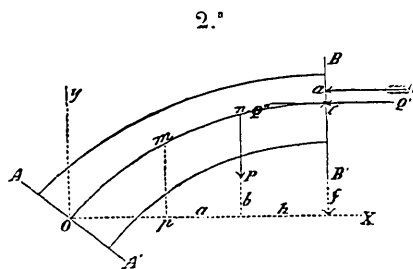


un cuerpo sólido A completamente rígido en dos presiones P y P' que le mantengan apoyado en dos planos invariables M, M' por dos caras de contacto de alguna estension superficial finita. Para que este problema se haga determinado es preciso tener en cuenta la elasticidad de sólido A, y solo entonces, se podrá averiguar el punto de aplicacion de las presiones en las juntas respectivas, y tener un conocimiento exacto del estado de equilibrio de la obra, prescindiendo por completo de coeficientes determinados siempre con alguna incertidumbre y arbitrariedad.

2. Como las bóvedas son construcciones de importancia, se supondrá en lo que sigue que han de satisfacer á las dos condiciones expresadas en la *Nota sobre el coeficiente de estabilidad*, (*) lo que simplificará la aplicacion de las fórmulas. En este caso, no desuniéndose las dovelas por ninguna de sus juntas, todo el arco se podrá considerar como un solo

cuerpo elástico, y se le podrán aplicar las fórmulas de la resistencia de materiales relativas á la flexion de piezas curvas, debiendo desecharse desde luego como no estables en el sentido indicado aquellas bóvedas para las cuales el resultado del cálculo indique que alguna junta no está comprimida en toda su longitud.

3. Sea oc (fig. 2.^a) la linea de los centros



de gravedad de las secciones transversales del arco, considerado como pieza curva, que se supone apoyado en el plano de arranques AA' y en el plano vertical BB' que pasa por el medio de la clave, pues por la simetría de la figura los puntos situados en ese plano no se podrían mover sino permaneciendo siempre en él. Se supondrá que el plano BB' se reemplaza por su reaccion Q , aplicada á un punto a , cuya intensidad y posicion se determinarán por las condiciones de que el punto c no tenga ninguna desviacion horizontal, y la junta ó seccion á que pertenece no se separe de su primitiva direccion vertical. Iguales consideraciones se aplicarán al plano AA' , en el cual se tomarán el origen de coordenadas y el de los ángulos. Finalmente, se supondrá aplicada á un punto n del eje una fuerza P , cuya traslacion á dicho punto habrá originado en general un par de momento μ .

4. Las fórmulas generales de la flexion de piezas curvas son (*).

$$\left. \begin{aligned} d\varphi' - d\varphi &= M \frac{ds}{E} \dots \dots \dots \\ dx' - dx &= -(\varphi' - \varphi) dy + \frac{T}{E\omega} dx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) Véase el tomo VII de la REVISTA, pag. 279.
Tomo VIII.

(*) Véanse mis *Lecciones sobre la resistencia de los materiales*. 2.ª ed., páginas 62 y 132.
Madrid 1.º de Mayo de 1860.

en las cuales representan :

x é y las coordenadas de un punto cualquiera m del eje oc .

s la longitud de un arco de esta curva contado desde o .

φ y φ' los ángulos que la normal á un punto m forma con el plano AA' , antes y despues de la flexion.

E , ω , y ε el coeficiente de elasticidad, el área y el momento de flexion que corresponden á una seccion normal cualquiera.

M el momento de todas las fuerzas aplicadas desde m hasta c , tomado respecto del punto m .

T la componente ortogonal de estas fuerzas en sentido de la tangente á la curva oc en m .

Considerando la fuerza Q trasladada al punto c en la posicion Q' , despues de haber añadido el par formado por Q y Q'' , cuyo mo-

mento se representará por N , y designando tambien por

L el momento de la fuerza P y del par μ respecto del punto m ,

S la componente de esta fuerza paralelamente á la tangente en m

h y f la abscisa y la ordenada del punto c

a y b las del punto n ,

Φ el ángulo que forman los dos planos AA' y BB'

se tendrá para el trozo de curva on

$$\begin{aligned} M &= L - Q(f-y) + N \\ T &= S + Q \cos.(\Phi - \varphi) \end{aligned}$$

y para el trozo nc

$$\begin{aligned} M &= -Q(f-y) + N \\ T &= Q \cos.(\Phi - \varphi) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1) dan para los puntos del trozo on

$$\left. \begin{aligned} \varphi' - \varphi &= \int_0^x \frac{L}{\varepsilon} ds - Q \int_0^x \frac{f-y}{\varepsilon} ds + N \int_0^x \frac{ds}{\varepsilon} \\ x' - x &= - \int_0^x dy \int_0^x \frac{L}{\varepsilon} ds + Q \int_0^x dy \int_0^x \frac{f-y}{\varepsilon} ds - N \int_0^x dy \int_0^x \frac{ds}{\varepsilon} + \int_0^x \frac{S}{E\omega} dx + Q \int_0^x \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{E\omega} dx \end{aligned} \right\}$$

y para los puntos del trozo nc , teniendo en cuenta que los valores iniciales de $(\varphi' - \varphi)$ y $(x' - x)$ que corresponden al punto n han de ser los mismos que resulten de las dos últimas ecuaciones haciendo en ellas $x=a$, se obtiene, despues de reducir,

$$\left. \begin{aligned} \varphi' - \varphi &= \int_0^a \frac{L}{\varepsilon} ds - Q \int_0^x \frac{f-y}{\varepsilon} ds + N \int_0^x \frac{ds}{\varepsilon} \\ x' - x &= - \int_0^a dy \int_0^x \frac{L}{\varepsilon} ds - \int_a^x dy \int_0^a \frac{L}{\varepsilon} ds + \int_0^a \frac{S}{E\omega} dx + Q \left[\int_0^x dy \int_0^x \frac{f-y}{\varepsilon} ds + \int_0^x \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{E\omega} dx \right] \\ &\quad - N \int_0^x dy \int_0^x \frac{ds}{\varepsilon} \end{aligned} \right\}$$

Por lo que se ha dicho antes, estas fórmulas deben dar para el punto c , $(\varphi' - \varphi) = 0$ y $(x' - x) = 0$ y haciendo pues, $x=h$, resultarán las dos ecuaciones de condicion

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \frac{L}{\varepsilon} ds - Q \int_0^h \frac{f-y}{\varepsilon} ds + N \int_0^h \frac{ds}{\varepsilon} &= 0 \\ - \int_0^a dy \int_0^x \frac{L}{\varepsilon} ds - (f-b) \int_0^a \frac{L}{\varepsilon} ds + \int_0^a \frac{S}{E\omega} dx + Q \left[\int_0^h dy \int_0^x \frac{f-y}{\varepsilon} ds + \int_0^h \frac{\cos.(\Phi-\varphi)}{E\omega} dx \right] \\ - N \int_0^h dy \int_0^x \frac{ds}{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuyas ecuaciones efectuando con los datos las integraciones indicadas, se pueden reducir á la forma

$$\left. \begin{aligned} l - Qq + Nn &= 0 \\ l' - Qq' + Nn' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.)$$

Los seis factores constantes que entran en estas dos ecuaciones se calculan fácilmente cuando los arcos son circulares y en algunos otros casos, y entonces una sencilla eliminación entre estas dos últimas ecuaciones da á conocer los valores de Q y N. El primero es la intensidad del empuje, y la relación $\frac{N}{Q}$ entre ambos es la distancia ac del punto de aplicación al medio de la clave.

5. Si en lugar de una sola fuerza P; como se ha supuesto, actuasen varias en otros puntos del sólido, los valores de Q y N serian la suma de los que correspondieran á la acción de cada fuerza por separado, porque tanto estas fuerzas como las reacciones y momentos de los pares entran en las ecuaciones (2) en la primera potencia, y los factores que multiplican á Q y N dependen solo de la figura en la curva oc . (*) Si las fuerzas y pares dados variasen de una manera continua, se integrarían los términos lds y $l'ds$, siendo las variables a y b .

6. Tomando como ejemplo mas sencillo el arco circular de espesor constante con una sobrecarga que obra en sentido vertical, se calcularán los términos l y l' para cada dovela

suponiendo aplicado á su centro de gravedad el peso P de ella misma y de su sobrecarga, y un par μ igual al producto del peso de la sobrecarga sola por su distancia al centro: el error que se comete tomando el círculo de los centros de gravedad en lugar del que pasa por los puntos medios de las juntas es muy pequeño en la práctica. Las sumas respectivas que resulten se sustituirán en lugar de l y l' en las ecuaciones (2), y calculando luego los valores de q , q' , n y n' para el arco oc se podrán deducir fácilmente de las ecuaciones citadas los valores de Q y N, y por consiguiente la distancia ca . Llamando θ á la amplitud del arco nc y ρ á su radio, los valores generales de l y l' para la dovela correspondiente son, haciendo $\frac{\varepsilon}{E\omega\rho^2} = \alpha$, y dividiendo por $\frac{\rho^2}{\varepsilon}$

todos los términos de l y por $\frac{\rho^3}{\varepsilon}$ los de l' ,

$$l = -P \left[(\Phi - \theta) \text{sen. } \theta + \cos. \Phi - \cos. \theta \right] + \frac{\mu}{\rho} (\Phi - \theta)$$

$$l' = +P \left[+\frac{1}{2} \text{sen. }^2 \theta + \frac{1}{2} \text{sen. }^2 \Phi + (\Phi - \theta) \text{sen. } \theta \right.$$

$$\left. - \text{sen. } \Phi \text{sen. } \theta + \cos. \Phi - \cos. \theta - \frac{1}{2} \alpha (\text{sen. }^2 \Phi - \text{sen. }^2 \theta) \right] -$$

$$- \frac{\mu}{\rho} \left[(\Phi - \theta) - \text{sen. } \Phi + \text{sen. } \theta \right]$$

y los de los demas términos, para la amplitud

$oc = \Phi$ son, divididos tambien por $\frac{\rho^2}{\varepsilon}$ y por $\frac{\rho^3}{\varepsilon}$

respectivamente.

$$q = -\text{sen. } \Phi + \Phi$$

(*) Resistencia de materiales, pág. 135.

$$q' = + 2 \operatorname{sen.} \Phi - \frac{1}{2} \operatorname{sen.} \Phi \cos. \Phi - \frac{3}{2} \Phi - \frac{1}{2} \alpha (\Phi + \operatorname{sen.} \Phi \cos. \Phi)$$

$$n = \frac{\Phi}{\rho}$$

$$n' = \frac{\operatorname{sen.} \Phi - \Phi}{\rho}$$

Mientras el espesor del arco no sea muy grande, se pueden despreciar todos los términos en que entra α .

7. Conocida la fuerza Q y su punto de aplicación α , se puede encontrar con mucha facilidad la presión en una junta y el punto en que se halla realmente aplicada. Para esto basta hacer la composición de la fuerza Q con el peso total que carga sobre la junta de que se trata. Por este método se pueden trazar las curvas de presiones con que representan el estado de equilibrio de las bóvedas Moseley (*) y Mery (**), con la diferencia de que estos autores tienen que escoger arbitrariamente la posición de dos puntos de esta curva, al paso que queda rigurosamente trazada por los cálculos que se han espuesto en esta nota, aunque sean complicados. Reduciendo á tablas los valores de Q y N se podría introducir este método en la práctica con tanta facilidad como los ordinarios. Tampoco habria gran inconveniente en aplicarlo á las bóvedas esféricas y en rincon de claustro.

EDUARDO SAAVEDRA.

EMPLEO DE PLANCHAS DE HIERRO ONDULADAS

EN LA CONSTRUCCION DE TABLEROS DE
LOS PUENTES.

El autor de la publicación francesa *Nouvelles annales de la construction* manifestó en 1856 la fabricación de esta clase de planchas sustituyendo ventajosamente la madera que se emplea en los puentes de hierro. Ensayada esta nueva construcción en puentes de 15 me-

tros de claro, creo atendiendo á sus ventajas y en interés del servicio de las obras públicas, aunque esto no ha podido pasar desapercibido entre nuestros constructores, publicar estas notas adquiridas de los Anales del distinguido Cuerpo de Conductores de Puentes y calzadas de Francia.

«Empecemos indicando la forma y dimensiones de los tipos que se fabrican en los talleres de Montataire divididos en dos clases, una con grandes ondas rectangulares, otra de ondas pequeñas circulares segun se ve en las figuras 1.^a y 2.^a Lam.^a 125.

El perfil del tipo grande tiene de longitud 0^m,854 y desarrollada la plancha 1^m,12 ó sea 1^m por 0,76 con las curvas, y un peso cada metro superficial sin desarrollar de 10^k,50 con un milímetro de espesor; siendo la máxima longitud de la plancha de 1^m,70. En el tipo pequeño forman las ondulaciones arcos de círculo descritos con un radio de 0,048 y su perfil de 0,74 desarrollado, se estiende hasta 0,81. El metro superficial pesa 8^k,80 con un milímetro de espesor, y la longitud máxima de cada plancha es de 2 metros.

El grueso de las planchas depende del espacio que media entre cada viga armada á las cuales están sujetas y de la duración que se les quiera asignar, previniendo la oxidación con las sustancias bituminosas que se conocen y cuidando que el espesor sea tal que al unirse las planchas con pasadores de 0,007 de diámetro no se produzcan roturas ni aberturas en el sentido de la fibra. El autor del proyecto fija el espesor para cada tipo, asignando al de las ondas rectangulares desde 0^m,0015 á 0^m,005 y á las de arco de círculo de 0^m,00125 á 0^m,002, calculando de la manera siguiente la carga que puede sobrellevar cada plancha ya ondulada sin aplastarse.

Tipo grande con una extensión de 1^m,50 y 0^m,005 de espesor.

Sección reducida de una semi-onda tipo rectangular.

Inspeccionando la figura 3.^a tendremos:

(*) *On the theory of the arch*. London 1839.

(**) *Ann. des p. et ch.* 1840.