

DEL MOVIMIENTO CONTINUO.

ARTICULO III:

Al publicar en el número 8.º, primer año de la *Revista de Obras públicas*, nuestro segundo artículo sobre el movimiento continuo, prometimos un tercero con la descripción de algunas máquinas inventadas con tal objeto, y que gozando de mas ó menos crédito han dado origen á la formación de sociedades; suspendida su publicación por causas ajenas á nuestra voluntad, tócanos hoy cumplir el compromiso contraído; mas ante todo, séanos permitido hacer algunas reflexiones generales acerca del asunto que discutimos.

Sabidas son por nuestros artículos anteriores las razones que á su publicación nos indujeron: el deseo por una parte de dar fin con empresas de tal género, y la necesidad por otra de destruir el ridículo que semejantes errores y otros análogos ocasionan, han sido los móviles que á tratar este asunto nos han impulsado. Era, pues, indispensable ilustrar la opinión del público; hacer que se comprendiese lo absurdo de tal empeño; en una palabra, poner la cuestión al alcance de todo el mundo. ¿Es esto posible? ¿es lo que en efecto se ha hecho? Hé aquí lo que sucintamente nos propenemos examinar.

Si hubiese algun medio de presentar la cuestión en tales términos, que para su completa inteligencia fueran inútiles todos los conocimientos de mecánica que nuestros artículos suponen, si quier sean bien pocos; si tal asunto pudiese descender de las alturas de la ciencia hasta el nivel de lo que se llama sentido comun sin perder por esto nada de su exactitud y precision; si en una palabra, fuesen lujo de ciencia, como tal vez se crea por algunos, los pocos principios de estática y dinámica, que hemos empleado, en tal caso nosotros seríamos los primeros en condenar semejante marcha, porque nada podría justificarla; mas si es por el contrario imposible tratar la cuestión sin recurrir á la ciencia, si no hay otro medio para demostrar lo absurdo de tal problema que fundarse en conocimientos que no todos poseen, por ser completamente ajenos á sus respectivas carreras; en tal caso ¿deberá abandonarse el campo á charlatanes é ignorantes, habrá que resignarse á deplorar en silencio la ridícula vanidad de unos, la ciega confianza de otros, la punible malicia de algunos, ó se deberá por el contrario luchar hasta el último extremo y ensayar el partido que de un artículo dedicado á este asunto puede sacarse? Creemos bien fácil la respuesta: un artículo con tal objeto siempre tiene alguna utilidad, y ya que no sea posible llevar la convicción al ánimo de todos, algo debe pesar en la balanza de las probabilidades, al menos para las personas prudentes, la sancion que un periódico científico, el único en su clase en España, dá á las ideas que emitimos por el solo hecho de insertar en sus columnas un artículo destinado á probar lo absurdo que es dedicarse á buscar el movimiento continuo. Lo repetimos; no consideraríamos esto como bastante, si fuera posible mas, y no emplearíamos el

Tomo II.

triste recurso de las autoridades por respetables que sean, si pudiéramos sustituirlo por la evidencia; mas ya que no sea posible convencer, cumplamos aconsejando, y si desgraciadamente nuestros consejos siguen la suerte de otros muchos, réstanos el consuelo de haber avisado el peligro y quede la responsabilidad para los que, deslumbrados por lo maravilloso y lo difícil, no temen arriesgarlo todo en empresas cuyo éxito es tan poco seguro.

Ha sido preciso para que recurramos á tal extremo, que miremos como imposible reducir la cuestión á términos sencillos, inteligibles para todos, y solo un profundo convencimiento de lo inútil que seria cuanto en otro sentido intentásemos, ha podido decidarnos á obrar así. No se nos oculta, sin embargo, cuán poco conforme se halla esta opinion con ciertas ideas al presente muy en boga, con ese afán de ponerlo todo á la *portée de tout le monde*, que á tener mejor éxito y á estar mas justificado por la práctica seria un golpe mortal para todas las ciencias que en tal caso solo podrían mirarse como el medio de encubrir la verdad y de hacer difícil su estudio. Sea de ello lo que quiera, tales son nuestras ideas sobre este punto: miramos como imposible, al menos en el dia, tratar el problema del movimiento continuo con entera exactitud, sin recurrir á conocimientos de mecánica: obligados por esta necesidad hemos estudiado la cuestión en el único sentido que podíamos hacerlo, y persuadidos de que no á todos convencerán nuestros artículos y que por lo tanto en este sentido no tienen aplicacion, hemos tratado de probar que aun así pueden tener alguna utilidad práctica.

Hechas estas aclaraciones, terminemos de una vez la tarea que nos hemos impuesto.

Nada mas fácil que presentar numerosos ejemplos de máquinas destinadas al movimiento continuo, porque desgraciadamente no son pocas las que en España existen: sin embargo, solo examinaremos una de las mas célebres, y que es en efecto de las que mas ilusion pueden causar.

Al hacer la descripción del aparato lo supondremos reducido á sus elementos mas esenciales, prescindiendo de las piezas secundarias que solo servirían para complicar la figura, y sustituyendo, con el mismo objeto, las ruedas y arcos dentados por sus círculos primitivos ó de contacto.

La parte principal del aparato (fig. 1.ª) se compone de una rueda $a, a', a'', a''', A'', A', A$ gírtoria al rededor de un eje horizontal proyectado en O ; de varios ejes horizontales $a, a', a'', a''', A, A', A'', A'''$, unidos invariablemente á la corona de la rueda y al rededor de los cuales pueden girar otras tantas ruedas $e, e', e'', e''', EC, E', E''$, E''' dentadas en su circunferencia. A cada una de estas ruedecillas va unida una palanca $ac, a'c', a''c'', a'''c'''$, A, T, A', A'', A''' con un peso p, p', p'', p''' , P, P', P'', P''' en su estremidad.

Dos arcos dentados $tT, t'T'$ se hallan fijos en la parte superior é inferior del aparato, y engranan con las pequeñas ruedas al paso de estas por los arcos $aA, a'''A'''$.

Todas las ruedas de la izquierda presentan sus palancas al interior de la rueda principal, y por el

Madrid 15 de junio de 1854.

contrario, al exterior las de la derecha. Al pasar cada ruedecilla por el arco aA , engrana con el tT ; el peso p se va elevando, y al llegar á la posición A , la palanca ha pasado al exterior. Una cosa análoga se verifica en el arco tT .

Finalmente, sistemas particulares que no trataremos de explicar, por ser ajenos á nuestro objeto, fijan las pequeñas ruedas después que han pasado los arcos dentados.

Hé aquí ahora el raciocinio que el autor del aparato emplea para demostrar su eficacia: «Siempre, dice él, hay tantos pesos á la izquierda como á la derecha; todos ellos son iguales, y los de la derecha distan mas del centro que los de la izquierda; luego la máquina girará continuamente en el sentido que la flecha indica.»

Pocas palabras nos bastarán para probar lo inexacto de semejante demostración. El aparato en último análisis se reduce á una curva cerrada compuesta de dos arcos de círculo, $pp'p''p'''$, $PP'P''P'''$, de dos trozos de epicicloide alargada $p_1p_1P_1P_1$ — $p'''p'''$ y de varios pesos que por ella se mueven. Ahora bien, cada peso al descender desde la parte superior P á la inferior P''' por el arco $PP'P''P'''$, desarrolla un trabajo motor exactamente igual al que, prescindiendo de resistencias pasivas, es preciso emplear para elevarle á la misma altura, siguiendo el trayecto $P'''p'''p''p'P$; mas desde el instante en que las resistencias pasivas absorban una parte de dicho trabajo, el movimiento será cada vez mas lento y concluirá por ser nulo. Con lo dicho pudiéramos dar por concluido lo concerniente al aparato de que nos ocupamos; sin embargo, no lo abandonaremos antes de haberlo examinado detenidamente y de reducirlo á lo que en realidad es.

Segun el autor de la máquina, siempre hay una fuerza que tiende á mover el aparato en el sentido que la flecha indica: error notable cuyo origen es el no contar para nada con los pesos de la parte superior é inferior. Hay posiciones en las cuales tiende á moverse de izquierda á derecha; otras en que sucede precisamente lo contrario; y finalmente, algunas para las cuales hay equilibrio.

Con el objeto de hacer esta investigación, haremos, para una posición cualquiera del sistema, cuál es el momento resultante de todas las fuerzas que sobre él actúan y discutamos su valor.

Tomemos la cuestión en general y admitamos las notaciones siguientes:

R radio de la rueda principal.

r radio de las ruedecillas.

l longitud de la palanca.

P peso colocado en su estremidad.

$2n$ número de ruedecillas.

a número de grados del ángulo tOA (fig. 2.^a), cantidad que tomaremos como variable independiente.

M momento de fuerzas que favorecen el movimiento de izquierda á derecha.

M' momento de las fuerzas que se oponen al mismo.

Combinando cada peso P'' (fig. 2.^a) de la derecha con el opuesto p'' de la izquierda, obtendremos una resultante $Q=2P$, cuyo punto de aplicación Q distará del centro una longitud $OQ=l$. Todas estas resultantes, cuyos puntos de aplicación están comprendidos en el ángulo TOT' y se hallan situados en un arco concéntrico á la rueda y de un radio l , tenderán á mover esta en el sentido que la flecha indica. Los dos pesos P, P' , por el contrario, ejercerán su acción, favoreciendo el movimiento de las ruedecillas A, A' en el sentido de las pequeñas flechas f, f' ; mas como tal efecto no puede conseguirse sin que la rueda principal gire en sentido opuesto á la flecha F , resulta que ambos se oponen á las fuerzas Q, Q' etc., y que del valor y dirección que tenga lo resultante de ambos sistemas, dependerá á su vez el sentido del movimiento.

A fin de simplificar cuanto vamos á esponer con este objeto, indicaremos ante todo la marcha que pensamos seguir.

1.^o Hallaremos el momento de cada fuerza Q con relacion al eje de giro O , y la suma de todos ellos nos espresará el valor del momento total de las fuerzas que tienden á mover la rueda de izquierda á derecha.

2.^o Sustituiremos á las fuerzas PP' otras equivalentes actuando á la distancia R del eje O , y determinando el momento de estas últimas, tendremos una espresion que nos medirá la intensidad de la acción producida por las fuerzas P, P' .

3.^o Comparando los valores numéricos de ambos momentos, podremos conocer las posiciones del sistema en que hay equilibrio, aquellas en las cuales prepondera la acción de las fuerzas Q ó sea en que la máquina tiende á girar, como indica la flecha F , y finalmente las posiciones en que se verifica lo contrario.

1.^o—Espresion del momento de las fuerzas Q, Q' , etc.

El momento m de la fuerza Q será igual al producto de su intensidad $2P$ por su brazo de palanca $Oq=q$ ó sea $m=2Pq$, pero $q=l$ sen. OQq ; luego $m=2Pl$ sen. OQq . El ángulo OQq ó su igual XOQ , se compone de $XOT=\frac{90^\circ}{n}$ y de $TOQ=a$; por lo

tanto, $m=2Pl$ sen. $(\frac{90^\circ}{n}+a)$. El momento m' de la fuerza Q' se espresará análogamente por la fórmula $m'=2Pl$ sen. $(\frac{90^\circ}{n}+a)$, y finalmente el momento m^{n-1} de la fuerza Q^{n-1} tendrá por valor

$$m^{n-1} = 2Pl \text{ sen } \left[\frac{90^\circ}{n} + a + (n-2) \frac{180^\circ}{n} \right] = 2Pl \text{ sen } \left[(2n-3) \frac{90^\circ}{n} + a \right]$$

Sumando los resultados anteriores, tendremos

$$M = 2Pl \left[\text{sen } \left(\frac{90^\circ}{n} + a \right) + \text{sen } \left(3 \frac{90^\circ}{n} + a \right) + \text{sen } \left(5 \frac{90^\circ}{n} + a \right) \dots + \text{sen } \left[(2n-3) \frac{90^\circ}{n} + a \right] \right]$$

2.º—*Expresión del momento de la fuerza que reemplaza á las P P'.*

Para sustituir á la fuerza P otra actuando en A tangencialmente á la rueda principal, emplearemos el principio de las velocidades virtuales que en nuestro primer artículo dejamos espuesto. Representando por ds, ds' los caminos descritos por los puntos P y A, y por X la fuerza incógnita, tendremos

$$P \text{ sen BPY} \times ds = X ds'$$

de donde

$$X = P \text{ sen BPY} \times \frac{ds}{ds'}$$

El ángulo BPY es igual á PBA + BOX, luego

$$X = P \text{ sen (PBA + BOX)} \times \frac{ds}{ds'} \text{ ó desarrollando}$$

$$X = P \frac{ds}{ds'} [\text{sen PBA cos BOX} + \text{sen BOX cos PBA}].$$

Réstanos hallar los valores de PBA y BOX.

$$\text{BOX} = \text{tOX} - \text{tOB} = \frac{90^\circ}{n} - a$$

En el triángulo BAP tendremos, haciendo BP = L, la proporción siguiente:

$$\text{sen tAB} : L :: \text{sen PBA} : l$$

$$\text{ó bien} \quad \text{sen PBA} = \frac{l}{L} \text{ sen tAB}$$

Siendo la longitud de t₁B igual á la de t₂B, el número de grados del primer ángulo vendrá expresado del modo siguiente: a $\frac{R+r}{r}$ así pues

$$\text{sen PBA} = \frac{l}{L} \text{ sen a } \frac{R+r}{r}$$

y por lo tanto

$$X = P' \frac{ds}{ds'} \left[\cos \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \times \frac{l}{L} \text{ sen a } \frac{R+r}{r} + \text{sen} \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \times \sqrt{1 - \frac{l^2}{L^2} \text{sen}^2 a \frac{R+r}{r}} \right]$$

Finalmente $\frac{ds}{ds'} = \frac{L}{r}$ y el valor de X se convierte en

$$X = P \frac{L}{r} \left[\cos \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \frac{l}{L} \text{ sen a } \frac{R+r}{r} + \text{sen} \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \sqrt{1 - \frac{l^2}{L^2} \text{sen}^2 a \frac{R+r}{r}} \right]$$

ó simplificando y poniendo por L² su valor l² + r² + 2lr cos a $\frac{R+r}{r}$

$$X = P \frac{1}{r} \left[l \text{ sen} \left(\frac{90^\circ}{n} + \frac{R}{r} a \right) + r \text{ sen} \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \right]$$

Pasemos á la fuerza X' que debe sustituir á la P'.

Desde luego podemos establecer la ecuación siguiente:

$$X' = \frac{ds}{ds'} P \text{ sen B'P'Y'} \quad \text{ó bien} \quad X' = \frac{ds}{ds'} P (\text{sen P'B'A' cos B'O'X' - sen B'O'X' cos P'B'A'})$$

Sustituyendo por P'B'A', B'O'X' y $\frac{ds}{ds'}$ sus valores, y simplificando, hallaremos

$$X' = P \frac{1}{r} \left[l \text{ sen} \left(\frac{90^\circ}{n} + \frac{R}{r} a \right) - r \text{ sen} \left(\frac{90^\circ}{n} - a \right) \right]$$

Sumando los valores X X' y multiplicando por el brazo de palanca R, tendremos finalmente para el momento M'

$$M' = 2 P \frac{R}{r} l \text{ sen} \left(\frac{90^\circ}{n} + \frac{R}{r} a \right).$$

Observemos además que el radio r no es arbitrario desde el instante en que se fije el número n y que por lo tanto debe expresarse en función de esta cantidad. En efecto, suponiendo determinado n, el número de grados del arco tT es igual á

$$\frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n} \text{ y su longitud á}$$

$$\frac{180^\circ}{n} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R+r}{180^\circ} \right) = \pi \left(\frac{R+r}{n} \right);$$

pero el desarrollo del arco tT debe ser igual al de la semicircunferencia de la ruedecilla, luego

$$\pi \frac{R+r}{n} = \pi r, \text{ de donde resulta}$$

$$\frac{R+r}{r} = n; \quad \frac{R}{r} = n - 1.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de M' hallaremos

$$M' = 2 Pl (n - 1) \text{ sen} \left[\frac{90^\circ}{n} + (n - 1) a \right]$$

3.º Comparacion de ambos momentos.

Puesto que los valores de M y M' contienen el factor comun $2 Pl$, su comparacion solo depende de los dos factores restantes, y como en estos no se encuentran p, l, R, r , podremos concluir que dos

aparatos de este género con igual número de ruedecillas, pero en los cuales las demas dimensiones son distintas, se hallan en equilibrio para idénticos valores de a .

Los factores que vamos á comparar pueden ponerse bajo la forma siguiente:

$$\frac{M}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } a \left[\cos \frac{90^\circ}{n} + \cos 3 \frac{90^\circ}{n} + \cos 5 \frac{90^\circ}{n} \dots \dots \cos (2n-3) \frac{90^\circ}{n} \right] \\ + \cos a \left[\text{sen } \frac{90^\circ}{n} + \text{sen } 3 \frac{90^\circ}{n} + \text{sen } 5 \frac{90^\circ}{n} \dots \dots \text{sen } (2n-3) \frac{90^\circ}{n} \right] \end{array} \right.$$

$$\frac{M'}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} (n-1) \text{sen } \frac{90^\circ}{n} \cos (n-1) a \\ + (n-1) \cos \frac{90^\circ}{n} \text{sen } (n-1) a \end{array} \right.$$

Pudiéramos examinar ambas espresiones sin dar un valor particular á n ; pero en tal caso seria preciso que nos detuviéramos mas de lo que pensamos hacerlo; por lo tanto daremos un valor determinado á n y fácilmente se comprenderá, que conside-

raciones análogas á las que espondremos, podrian hacerse para otro cualquier caso.

Supongamos que el número de ruedecillas es 18; en tal caso $n = 9$ y las fórmulas generales, se convertirán en estas otras:

$$\frac{M}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } a (\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ + \cos 90^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ + \cos 150^\circ) \\ + \cos a (\text{sen } 10^\circ + \text{sen } 30^\circ + \text{sen } 50^\circ + \text{sen } 70^\circ + \text{sen } 90^\circ + \text{sen } 110^\circ + \text{sen } 130^\circ + \text{sen } 150^\circ) \end{array} \right.$$

$$\frac{M'}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{sen } 10^\circ \cos 8 a \\ + 8 \cos 10^\circ \text{sen } 8 a; \end{array} \right. \quad \text{efectuando las operaciones indicadas}$$

$$\frac{M}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} \cos 10^\circ \text{sen } a \\ + [1 + \text{sen } 10^\circ + 2(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ)] \cos a \end{array} \right.$$

$$\frac{M'}{2 Pl} = \left\{ \begin{array}{l} 8 \cos 10^\circ \text{sen } 8 a \\ + 8 \text{sen } 10^\circ \cos 8 a; \end{array} \right. \quad \text{ó finalmente, } \frac{M}{2 Pl} = 0,9848 \text{sen } a + 5,5846 \cos a$$

$$\frac{M'}{2 Pl} = 7,8784 \text{sen } 8 a + 1,3891 \cos 8 a$$

Las ecuaciones que tratamos de comparar, no tienen ya mas que la variable independiente a y por lo tanto podemos tomar su diferencia z como la ordenada de una curva cuya abscisa sea a . Los pun-

tos en que dicha curva corte al eje de las a nos indicarán las posiciones de equilibrio del sistema, y sus ordenadas, positivas ó negativas harán ver el sentido en que tiende á efectuarse el giro. Sea, pues,

$$z = 0,9848 \text{sen } a + 5,5846 \cos a - 7,8784 \text{sen } 8 a - 1,3891 \cos 8 a$$

Hagamos variar a desde 0° hasta 20° por la serie de valores $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$, etc., obtendremos para esta otra serie: 4,1955; 5,1292; 2,1090; 1,1552; 0,2870, etc.

Observando ademas cuán poco difieren las ordenadas á igual distancia de los extremos, se puede concluir desde luego que la curva tiene por eje de simetria la ordenada correspondiente á los 10° , lo cual pudiera demostrarse directamente y notando ademas que al pasar a de los 4° á los 5° y de los 15° á los 16° las ordenadas cambian de signo, puede deducirse que la curva corta al eje de las a á los $4^\circ 20'$ próximamente y á los $15^\circ 40'$.

De lo dicho podemos deducir las consecuencias

siguientes: Suponiendo el sistema en tal posicion que una de las ruedecillas principie á estar en contacto con el arco tT superior, y por lo tanto otra de las inferiores con el $t'T'$, la resultante de todas las fuerzas tenderá á mover la máquina de izquierda á derecha con una intensidad representada por el momento $4,1955 \times 2 Pl$. A partir de este instante la accion de la fuerza irá siendo cada vez menor, pero favoreciendo siempre el giro de izquierda á derecha: cuando el sistema haya descrito un ángulo de $4^\circ 20'$ próximamente, la accion de la resultante será nula, es decir, que si el sistema continúa moviéndose será tan solo por la velocidad adquirida y que habiéndole colocado en tal posicion

desde un principio, hubiera sido imposible, aun no existiendo resistencias pasivas, que se pusiera en movimiento sin la accion de alguna otra fuerza.

Desde el valor anterior de a las fuerzas que sobre la máquina actúan tienden á moverla de derecha á izquierda, y su accion va creciendo desde 0 hasta $2,529 \times 2Pl$ en que llega su máximun. A partir de los 10° valor de a correspondiente al anterior, principia á disminuir el momento motor hasta reducirse á cero cuando el sistema ha girado $45^\circ 40'$ próximamente. Para tal posicion hay otra vez equilibrio, y desde ella hasta los 20° las fuerzas actúan tendiendo á mover el aparato de izquierda á derecha.

En los 20° principia un nuevo período igual al anterior.

Queda, pues, probado de una manera terminante, que es absolutamente falsa la hipótesis en que se funda el autor de la máquina, y que lejos de actuar la gravedad tendiendo á mover constantemente la máquina de izquierda á derecha, hay posiciones del sistema en las cuales existe equilibrio, y otras en las que aun sin contar con las resistencias pasivas y suponiendo que no ha recibido ninguna impulsión inicial, principiará á girar en el sentido opuesto.

Sigamos mas adelante en el estudio del aparato, y con el objeto de apreciar debidamente la accion de la gravedad sobre él, determinemos los diversos valores de la velocidad prescindiendo como hasta aqui de las resistencias pasivas.

Pudiéramos seguir en tal investigacion una marcha general, estableciendo la ecuacion del movimiento de un sistema alrededor de su eje; mas co-

mo en tal caso tendríamos que efectuar una integracion y construir ademas la curva de las velocidades, y nuestro objeto no es en modo alguno obtener números exactos que nos midan aquellas, sino únicamente hacer que se comprenda cuál es la naturaleza del movimiento y el sentido en que varia la velocidad angular para las diversas posiciones, preferimos aplicar directamente el principio de las fuerzas vivas. Dicho principio, segun queda espuesto en nuestro primer artículo, puede espresarse asi: «la variacion de fuerza viva de un sistema, es igual al doble de la variacion del trabajo resultante.» Segun esto, dada una velocidad inicial y el trabajo correspondiente, es facil hallar la velocidad del sistema en otro cualquier instante, conocida que sea la cantidad de trabajo desarrollado.

Asi, pues, encontremos ante todo los trabajos correspondientes á diversos valores de a .

Los valores $2Pl \times 4,1955$, $2Pl \times 5,1292$, $2Pl \times 2,1090$ etc., espresan, segun hemos dicho, el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre el sistema para los valores de a 1° , 2° , 5° etc.; pero fácilmente se comprende que las mismas espresiones miden la intensidad de una fuerza, actuando á la distancia 1 del eje 0 y cuyo efecto puede sustituirse en cada instante al de todas las demas fuerzas. En tal hipótesis, admitiendo que la intensidad de la fuerza motriz permanezca constante en una longitud de 1° y representando esta por ds para un círculo cuyo radio es 1, tendremos para los trabajos elementales correspondientes á 0° 1° 2° 5° 4° , etc., las espresiones siguientes:

$$0, 2Pl ds \times \frac{4,1955 + 3,1292}{2}, 2Pl \times ds \frac{3,1292 + 2,1090}{2}, 2Pl ds \times \frac{2,1090 + 1,7552}{2}, \text{etc.},$$

y sumando varios términos de esta serie, hallaremos el trabajo de la gravedad entre dos posiciones del sistema.

De aqui se deduce que las áreas elementales comprendidas entre el eje de las a , dos ordenadas consecutivas y la curva, son proporcionales á los trabajos elementales; es decir, que basta multiplicar por un número constante $2Pl$ dichas áreas, para tener los trabajos, y que del mismo modo las áreas totales miden los trabajos cuidando de restar las que corresponden á ordenadas de distinto signo.

Dedúcese ademas esta consecuencia importante: el trabajo desde 0° hasta $4^\circ 20'$ es precisamente igual al desarrollado desde $4^\circ 20'$, hasta los 10° , pero de signo contrario. Nos hallamos al presente con todos los elementos necesarios para seguir el movimiento de la máquina, parta de cualquiera posicion, reciba ó no una velocidad inicial. Sin embargo, nos contentamos con examinar un solo caso. Supongamos que parta el aparato de la posicion $a=0$ sin velocidad inicial, y prescindamos de las resistencias pasivas.

Buscando en la figura 5.^a la ordenada correspondiente á $a=0$, vemos que es positiva é igual á 4,1955; es decir, que las fuerzas actuantes tienden á mover el aparato en el sentido que la flecha

F de la figura 1.^a indica. En este sentido, pues, principiará á girar.

Los trabajos elementales irán siendo cada vez menores pero siempre positivos, lo que prueba: 1° que la velocidad irá aumentando; 2° que los incrementos serán cada vez menores.

Supongamos que ha descrito el sistema un ángulo de $4^\circ 20'$, la velocidad habrá llegado á su máximun y su valor está determinado por la ecuacion

$$\frac{Nv^2}{2} = 2Pl ds \times 8,6824$$

en la cual N es una constante dependiente de la forma del sistema, v la velocidad angular, y $2Pl ds \times 8,6824$ el trabajo de la gravedad entre $a=0$ y $a=4^\circ 20'$.

A partir de este instante, las fuerzas obran en sentido contrario, los trabajos elementales son negativos, y la velocidad principia á disminuir. Para conocer la posicion del sistema en que la velocidad se reduce á cero, basta hacer $v=0$ en la ecuacion

$$\frac{Nv^2}{2} = 2Pl ds. T. \text{ la cual da } T=0. \text{ Y como el}$$

trabajo desde $a=0$ hasta $a=4^\circ 20'$ es igual y de signo contrario al desarrollado desde $a=4^\circ 20'$, hasta $a=10^\circ$, resulta que el sistema habria llegado á la

posicion $a=10^\circ$ cuando la velocidad sea nula: mas como en tal posicion la gravedad tiende á moverle de derecha á izquierda, retrocederá hasta la posicion $a=0$ aumentando su velocidad desde $a=10^\circ$, en que es nula, hasta $a=4^\circ 20'$, y volverá á descender á cero cuando $a=0$. Una nueva oscilacion principiara, y el movimiento se prolongaria indefinidamente sino existiesen resistencias pasivas; mas veamos lo que sucede cuando se cuenta con ellas.

Las resistencias pasivas siempre dan origen á un trabajo negativo; por lo tanto cada trabajo motor y elemental quedará disminuido, y al contrario, los trabajos elementales y resistentes serán mayores. De aqui resulta que la velocidad llegará á su máximo antes de la posicion $a=4^\circ 20'$, y que á su vez se reducirá á cero para un valor de a menor que $a=10^\circ$. Hallándose el sistema entre los $4^\circ 20'$ y los 10° retrocederá, y la velocidad angular se reducirá á cero antes de que a lo sea. Una nueva oscilacion principiara, pero menor aun que la anterior, y continuando de este modo el movimiento, las amplitudes de las oscilaciones irán disminuyendo hasta que el sistema coincida con la posicion $a=4^\circ 20'$; es decir, hasta que llegue á su posicion de equilibrio.

Supongamos ahora que el aparato ha recibido una impulsión inicial: su velocidad aumentará desde $a=0$ hasta $a=4^\circ 20'$ en que llegará á su máximo para disminuir en seguida. Cuando a sea igual á 10° , el trabajo motor desde $a=0$ hasta $a=10^\circ$ será nulo, y la fuerza viva del sistema tendrá un valor idéntico al inicial. A medida que siga girando el aparato, la fuerza viva seguirá disminuyendo; llegará en $a=15^\circ 40'$ á su mínimo, y finalmente cuando $a=20^\circ$ el sistema tendrá la misma velocidad primitiva, continuando el movimiento con oscilaciones iguales á las anteriores, pero todas en el mismo sentido; es decir, de izquierda á derecha.

Admitamos que existen resistencias pasivas, y veamos su influencia. Al concluir el aparato de girar 20° , el trabajo desarrollado desde 0 hasta $4^\circ 20'$ y $15^\circ 40'$ á 20° , habrá sido compensado por el trabajo negativo desde $4^\circ 20'$ á $15^\circ 40'$; pero como las resistencias pasivas han actuado continuamente, la fuerza viva y la velocidad del sistema serán menores que las iniciales. De este modo á cada ángulo de 20° que describa el sistema, se hallará con una velocidad menor: disminuyendo, pues, continuamente, llegará un instante en que sea 0 para una posicion comprendida entre $a=10^\circ$ y $a=15^\circ 40'$ por ejemplo $a=S$; desde tal instante cesará de moverse en el mismo sentido y retrocederá. Al llegar á $a=0$ tendrá una fuerza viva menor que la correspondiente á $a=10^\circ$ por razon de las resistencias pasivas. Seguirá moviéndose, pues, de izquierda á derecha, y su velocidad quedará reducida á cero para un valor de a comprendido entre $15^\circ 40'$ y 20° . Desde dicha posicion retrocederá el aparato y llegará hasta $a=S$ á no existir resistencias pasivas; mas teniéndolas en cuenta no sucederá así: la máquina llegará á la velocidad cero para un valor de a menor que S , y de este modo seguirá disminuyendo la amplitud de las oscilaciones hasta quedar el sistema en equilibrio.

Reasumiendo cuanto llevamos dicho, en el supuesto de ser $a=0$ el punto de partida, sino existiesen resistencias pasivas y la máquina no recibiese ninguna impulsión inicial, se moveria continuamente haciendo oscilaciones iguales; si por el contrario existen resistencias pasivas, las oscilaciones disminuyen hasta quedar la máquina en equilibrio.

Cuando el aparato recibe una impulsión inicial, mas se prescinde de las resistencias pasivas; en tal caso se mueve continuamente en el mismo sentido, según periodos iguales; mas desde el instante en que se cuenta con las resistencias pasivas, como en en la naturaleza sucede, la cuestion cambia de aspecto. El movimiento se continua, es cierto, en el mismo sentido durante cierto periodo; mas llega un caso en que retrocede el aparato, y desde tal instante principia una serie de oscilaciones que termina por quedar el sistema en equilibrio.

Resultados enteramente análogos se obtendrian suponiendo que el aparato partiese de otro punto cualquiera.

De todo cuanto hasta aqui hemos dicho se deduce, que la tan célebre máquina de movimiento continuo, no es otra que un péndulo *mas ó menos* complicado, mas ó menos encubierto, y con el que ha sucedido á su autor lo que decíamos en nuestro segundo artículo; «creerá haber conseguido el objeto porque ha logrado disfrazar su error de tal modo, que sin sospecharlo ni conocerlo lo admite como el premio de su trabajo.» Y sin embargo, la identidad entré su péndulo y el sistema en cuestion, es completa. Cuando á un péndulo se le separa de su posicion de equilibrio, y se le abandona á la gravedad, oscila durante cierto tiempo á uno y otro lado de su posicion de equilibrio hasta coincidir en ella: cuando á la máquina que hemos examinado se la separa de $a=4^\circ 20'$ ó $a=15^\circ 40'$, hace lo propio.

Si á un péndulo se le dá una impulsión inicial, puede aumentarse la amplitud de las oscilaciones, mas concluye por quedar en equilibrio. Si el aparato en cuestion recibe una impulsión capaz de hacerle llegar á un punto situado entre $a=10^\circ$ y $a=15^\circ 40'$, la oscilacion aumenta tambien, pero cesa pasado cierto tiempo.

Puede ser tan considerable la impulsión que se dé á un péndulo, que llegue á su segunda posicion de equilibrio: es decir, que se eleve hasta la vertical prolongada que pase por su punto de giro, y que continúe girando en el mismo sentido durante cierto tiempo para terminar por oscilaciones cada vez mas pequeñas: hemos visto que cuando la impulsión es tal que el aparato gira hasta pasar la posicion $a=15^\circ 40'$; es decir, su segunda posicion de equilibrio, se mueve durante cierto tiempo en el mismo sentido, y concluye el movimiento por oscilaciones cuya amplitud disminuye hasta reducirse á cero.

Finalmente, un péndulo tiene dos posiciones de equilibrio: una que se llama *estable*: otra que no lo es: el sistema que acabamos de estudiar tiene tambien dos posiciones de equilibrio: una estable correspondiente á $a=4^\circ 20'$; otra $a=15^\circ 40'$ que no lo es.

Y si bien se considera, nada tiene de admirable que tal suceda: un sistema que gira al rededor de su eje, y qué solo se-halla sometido á la gravedad, ¿qué otra cosa que un péndulo podia ser?

Consecuentes con los principios espuestos en este artículo, hemos estudiado la célebre máquina del movimiento continuo como únicamente podíamos hacerlo; auxiliándonos de la mecánica; mas aun así hemos procurado simplificar la cuestion todo lo posible, en vez de considerar el problema en general, sin suponer un número determinado de ruedecillas, sin hacer la hipótesis de que no pasen á la vez dos ó mas por los arcos fijos; hemos particularizado la cuestion en obsequio de la claridad; la hemos particularizado para deducir números en vez de fórmulas, para presentar, en fin, un ejemplo.

Si al examinar el problema del movimiento continuo, y al estudiar la máquina á que hemos dedicado este artículo, hemos hablado á veces con demasiado calor, hemos sido hasta cierto punto excesivamente severos con los que se dedican á semejante investigacion y con sus admiradores, no ha sido nuestro objeto dirigirnos á tal ó cual inventor, ni mucho menos ajarlos en lo mas mínimo. Hemos hablado en nombre de la ciencia, por poco dignos que seamos de tal cargo; nos hemos dirigido *al error* y como personificacion de él al *ente moral* representado por el nombre siguiente: *autor de tal ó cual máquina*. Hemos preferido examinar detenidamente esta máquina, que goza al presente de gran celebridad, á describir otras muchas que ya pasaron, que ya fueron adonde en breve irá esta y cuantas se inventen con tal objeto, por el doble motivo de estar llamando en el día la atencion pública y de ser una de las que mas *ilusion* pueden producir. Ilusion hemos dicho y lo repetimos, porque movimiento continuo y espontáneo, es una ilusion, y aunque se vea mover una máquina una semana y otra, y aunque sea uno y otro año, esto nada prueba; no será la primera que por tanto tiempo ha parecido desmentir á la ciencia; pero al fin ha cesado de moverse, porque la ciencia no miente, y los sentidos sí; porque las leyes de la naturaleza jamás se contradicen.

JOSÉ ECHegaray.

CANAL DE ISABEL II.

PRESA DEL PONTON DE LA OLIVA.

La nivelacion practicada por los ingenieros don Juan Rafo y D. Juan Ribera, con el fin de formar el ante-proyecto de un canal derivado del rio Lozoya para abastecer de aguas á Madrid, comprobada escrupulosamente en 1851, dió por resultado que las aguas bajas de aquel rio en el ponton de la Oliva estaban 26,46 metros (95 pies) mas altas que el umbral de la puerta de Santa Bárbara.

Para que el abastecimiento de aguas de la capital fuese el mas perfecto posible, se consideró como indispensable construir una presa de contencion,

contigua y por encima del ponton de la Oliva, con el fin de levantar las aguas á una altura que permitiese situar el depósito de recepcion 45,57 metros (56 pies) mas alto que la puerta de Santa Bárbara. Es indudable que de esta altura depende que el agua llegue por solo su presion á los edificios situados en la parte mas elevada de Madrid y á sus pisos mas altos, y que pueda alcanzar tambien al nuevo barrio de Chamberí.

La longitud del trazado definitivo resulta de 70,04 kilómetros (12,57 leguas), es decir, cinco y media leguas menos que la del ante-proyecto, pues no era posible determinar en este, por falta de datos, el número de minas y acueductos que tanto habian de contribuir al acortamiento de la linea.

La pendiente general del canal es de 0,0002, ó sea 1 por 5000, que produce una velocidad suficiente para que no se altere la calidad de las aguas: pendiente que se ha aumentado ademas, por razón de economia, en las minas y acueductos que tendrán la de 1 por 1500 y 1,5 por 1000, contribuyendo su larga estension y su situacion alternada en la linea del canal, á que la velocidad media de las aguas sea muy superior á la que resultaría de la pendiente general que hemos indicado.

Con estas pendientes resulta un desnivel para el canal desde el ponton de la Oliva hasta la superficie del agua en el depósito de recepcion, de 50,64 metros (110 pies), al cual, añadiendo los 45,60 metros (56 pies) que esta se hallará sobre el umbral de la puerta de Santa Bárbara, resulta un total de 46,24 metros (166 pies); y como el desnivel que habia disponible entre las aguas bajas del Lozoya y dicha puerta era tan solo de 26,46 metros (95 pies), fue preciso establecer la solera del bocal en la presa á 49,78 metros (71 pies) de altura hasta el nivel de las mismas bajas aguas.

Innegable es la conveniencia de aumentar siempre esta altura para que la toma de aguas se haga con la debida limpieza y que los hielos no la obstruyan; y en el presente caso era hasta una necesidad este aumento, para obtener un depósito suplementario que repare las bajas que en el verano experimentan las aguas del Lozoya. Por esta razon se eleva 6,82 metros (24,5 pies) la cresta ó coronacion de la presa sobre la solera del canal.

Antes de dar á conocer la situacion y forma de esta obra, bueno será hacer una breve descripcion geológica de la cuenca del Lozoya. Este rio que hacia su nacimiento corre largo trecho por medio de rocas cristalinas, pasa en seguida por una pizarra antigua, casi siempre negra y dura, que se dirige próximamente al N. magnético, con buza-

MOVIMIENTO CONTINUO

Articulo 3.º

